Breslau 1929

F Rolfinke

„ Beitrag zur Theorie des Rautenträgers "

Von der

Technischen Hochschule zu Breslau

zur

Erlangung der Würde eines Doktor - Ingenieurs

genehmigte

Dissertation.

Vorgelegt von

Dipl.Ing. Friedrich Rollfinke

aus Nieder-Salzbrunn,

Referent	Korreferent
Prof.Dr.Ing.L.Mann	Prof. Rein .

Tag der mündlichen Prüfung: 19.Dezember 1929.

Zeichnungs - Druckerei : Geschw. Erbe, Breslau. 1930.

Herrn und Frau Cassirer

in aufrichtiger Dankbarkeit.

Literaturangabe.

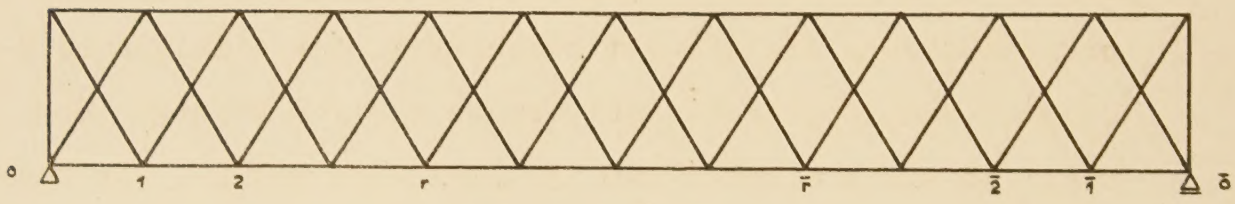
Mann , Beitrag zur
„ Festschrift Heinrich Müller - Breslau " 1912.

Dr.-Ing.Christiani : Dissertation:
Beitrag zur Theorie mehrteiliger
Fachwerke, 1927.

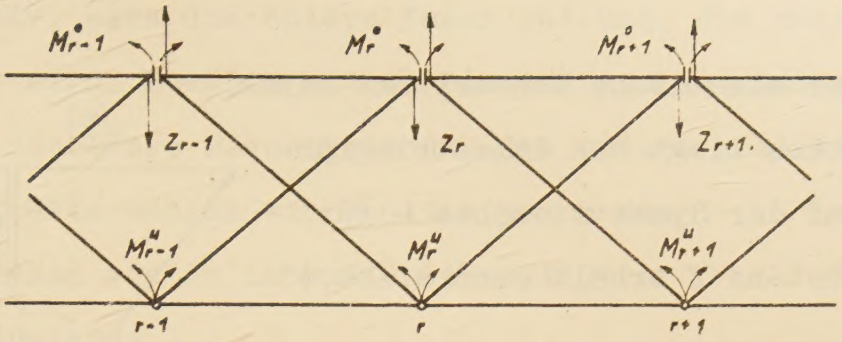
Dr.-Ing.Christiani : Strenge Untersuchung am Rhomben-
fachwerk, 1929.

Im Gebiet der Baukonstruktionen hat der Rautenträger - ein 2 teiliges Netzwerk mit paralleler Gurtung- in den letzten Jahren vielfach Anwendung gefunden. Bereits wiederholt als Windverband ausgeführt, ist man dazu übergegangen, ihn auch als Hauptträger auszubilden. Vorliegende Arbeit befasst sich mit der statischen Berechnung solcher 2 teiliger Netzwerke, setzt dabei aber voraus, dass die Querschnitte der Gurt - bezw. Diagonalstäbe unter sich gleich gross sind. Diese vereinfachende Annahme ermöglicht die Aufstellung von Systemen von Differenzengleichungen, damit also eine verhältnismässig einfache strenge Berechnung des Trägers, der man, wie wir sehen werden, immerhin eine Reihe wesentlicher Eigenschaften des Rautenträgers entnehmen kann.

Wir betrachten einen Träger nach Fig.1.



Die Knotenpunkte seien von links nach rechts mit den Ziffern 0, 1 ..... r bezeichnet, von rechts nach links mit $\bar{0}$, $\bar{1}$ ..... $\bar{r}$.

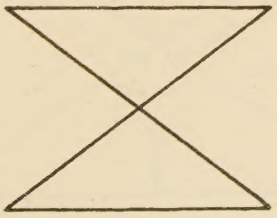


Wählt man ein statisch unbestimmtes Hauptsystem, derart, dass man am unteren Knotenpunkt r ein Gelenk einführt und den Gurt am oberen Knotenpunkt schneidet, so lassen sich als statisch unbestimmte Grössen

$$X_r = \tfrac{1}{2} \quad (M_r^o + M_r^u)$$
$$Y_r = \tfrac{1}{2} \quad (M_r^o - M_r^u)$$

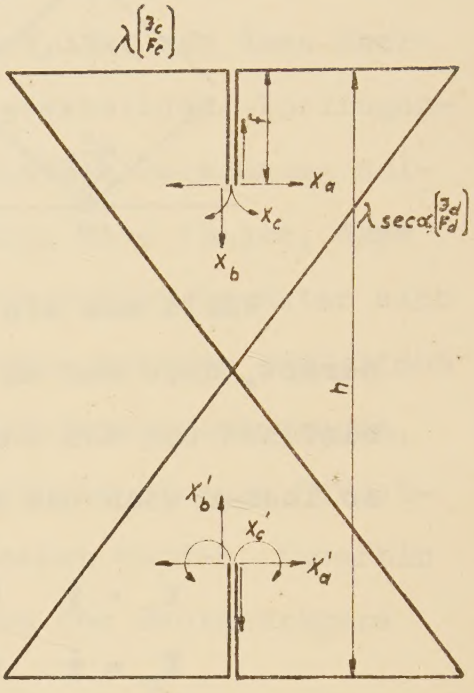
einführen.

In diesem Hauptsystem bleibt der Einfluss jeder statisch unbestimmten Grösse auf die beiden Felder links und rechts vom Knotenpunkt beschränkt. Das statisch unbestimmte Hauptsystem besteht, abgesehen vom Anfangs- und Endglied aus n elastischen Systemen nach Fig. 3. Wir nennen dieses System das Element des Trägers, dessen Berechnung zunächst durchzuführen ist.



Berechnung des Trägerelements.

Der elastische Schwerpunkt eines Dreieckes liegt aus Symmetriegründen auf der Symmetrieachse - für den Abstand f erhält man(s.Abb.):

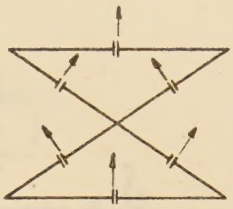


$$f = \frac{h}{4\left(1 + \cos\alpha \cdot \frac{J_d}{J_c}\right)} .$$

Als statisch unbestimmte Grössen im Trägerelement führen wir die Werte

X_a, X_b, X_c und X'_a, X'_b, X'_c ein. Hierbei bleibt der Einfluss der ersten drei Grössen auf das obere Dreieck beschränkt und der letzten drei Grössen auf das untere Dreieck. Da ausserdem die statisch unbestimmten Grössen im elastischen Schwerpunkt angreifen, kann man ihre Werte für jede beliebige Belastung einzeln sofort anschreiben.

Wir setzen fest : Momente an den Gurtstäben sind positiv, wenn die untere Faser gedehnt, die obere gekürzt wird. Momente an den Diagonalstäben sind positiv, wenn die obere Faser gedehnt, die untere gekürzt wird. Querkräfte zählen wir positiv, wenn sie so wirken wie in nebenstehender Figur.

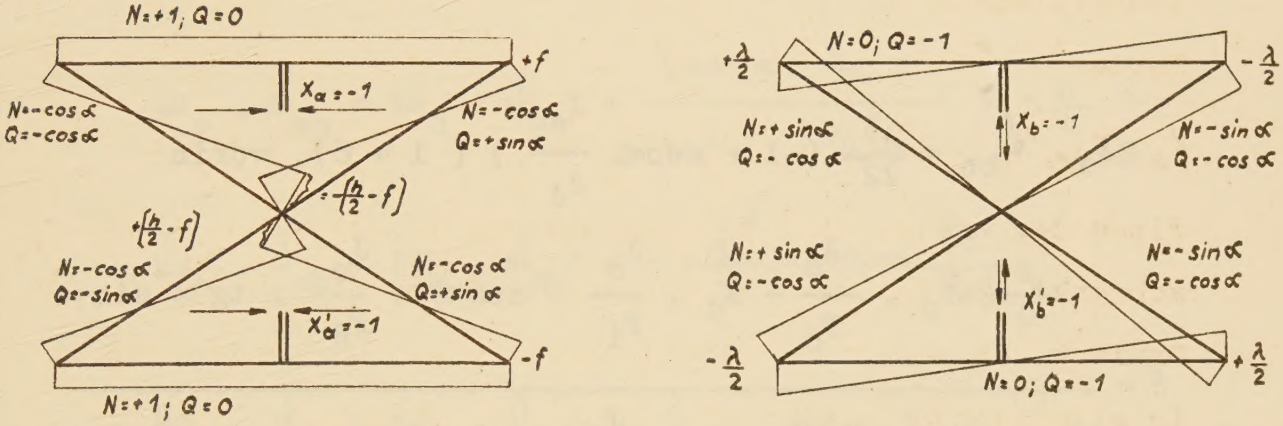


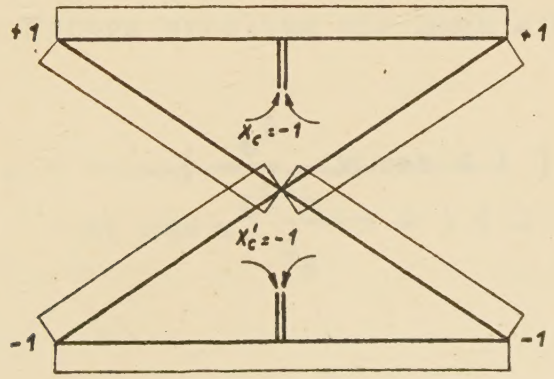
Die Zustände :

$X_a = -1$; $X_b = -1$; $X_c = -1$;

$X'_a = -1$; $X'_b = -1$; $X'_c = -1$

sind in nachfolgender Abb. dargestellt.





In bekannter Weise folgt:

$$EJ_c \cdot \delta_{aa} = \frac{h^2\lambda}{48} \cdot \frac{\sec\alpha \cdot \frac{J_c}{J_d}}{1+\sec\alpha \cdot \frac{J_a}{J_d}} \left(\sec\alpha \cdot \frac{J_c}{J_d} + 4 \right)(1+\delta).$$

worin:

$$\delta = \frac{\left(\frac{J_c}{F_c} + \cos\alpha \cdot \frac{J_c}{F_d} \right) + \frac{J_c}{F_d} \cdot K_d \cdot \frac{E}{G} \cdot \operatorname{tg}\alpha \cdot \sin\alpha}{\frac{h^2}{48} \frac{\sec\alpha \cdot \frac{J_a}{J_d}}{1 + \sec\alpha \cdot \frac{J_a}{J_d}} \left(\sec\alpha \cdot \frac{J_c}{J_d} + 4 \right)}.$$

$$EJ_c \cdot \delta_{bb} = \frac{\lambda^3}{12} \left(1 + \sec\alpha \cdot \frac{J_c}{J_d} \right) (1 + \varepsilon), \text{ worin}$$

$$\varepsilon = \frac{-\frac{E}{G}\left(K_c \cdot \frac{J_c}{F_c} + K_d \cdot \frac{J_c}{F_d} \cdot \cos\alpha \right) + \frac{J_c}{F_d} \cdot \operatorname{tg}\alpha \sin\alpha}{\frac{\lambda^2}{12} \left(1 + \sec\alpha \cdot \frac{J_c}{J_d} \right)}$$

$$EJ_c \cdot \delta_{cc} = \left(1 + \sec\alpha \cdot \frac{J_c}{J_d} \right).$$

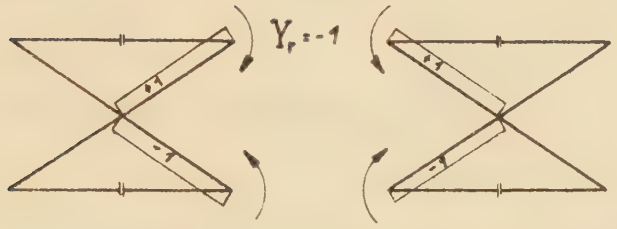
Ferner ist :

$$EJ_c \cdot \delta_{aa'} = EJ_c \cdot \delta_{aa} ,$$

$$EJ_c \cdot \delta_{bb'} = EJ_c \cdot \delta_{bb'}$$

$$EJ_c \cdot \delta_{cc'} = EJ_c \cdot \delta_{cc} :$$

Wir betrachten den Zustand $Y_r = -1$ und erhalten:



$$EJ_c \cdot \delta_{ma} = EJ_c \cdot \delta_{ma'} = \frac{\lambda \sec\alpha \cdot J_c}{2 \quad J_d} \left(f - \frac{h}{4} \right) .$$

$$EJ_c \cdot \delta_{mb} = EJ_c \cdot \delta_{mb'} = - \frac{\lambda^2}{8} \cdot \sec\alpha \frac{J_c}{J_d}$$

$$EJ_c \cdot \delta_{mc} = EJ_c \cdot \delta_{mc'} = \frac{\lambda}{2} \cdot \sec\alpha \frac{J_c}{J_d}$$

Mit diesen Werten erhalten wir nach einigen Umformungen:

$$X_a = X_{a'} = - \frac{6}{h\left(\sec\alpha \cdot \frac{J_c}{J_d} + 4 \right) (1 + \delta)}$$

$$X_b = X_b' = -\frac{1,5}{\lambda\left(1+\cos\alpha\cdot\frac{J_d}{J_c}\right)(1+\varepsilon)},$$

$$X_c = X_c' = \frac{0,5}{1+\cos\alpha\cdot\frac{J_d}{J_c}}.$$

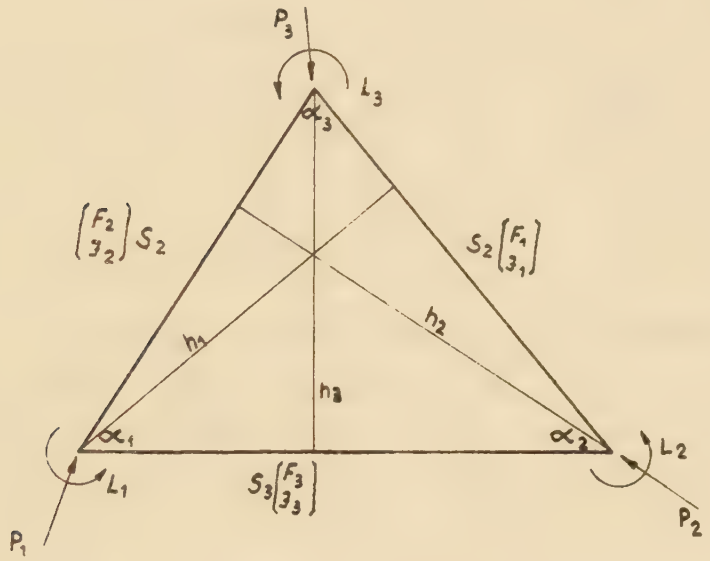
In entsprechender Weise kann man die mit $X_{a,b,c}$, bezeichneten Grössen am Trägerelement auch infolge der Lastzustände $X_r = -1$ und $Z_r = -1$ bestimmen, worauf sich alle Momente und Kräfte im Träger als Funktionen der zu Anfang eingeführten Grössen X_r, Y_r und Z_r darstellen lassen.

Obwohl der im vorstehenden beschriebene Weg wegen der vereinfachten Berechnung des Trägerelementes Vorteile zu bieten schien, stellten sich der weiteren Zahlenrechnung doch Verwicklungen entgegen, die eine Übersicht erschwerten; es soll daher noch ein zweiter Weg eingeschlagen werden. Herr Prof.Dr. Ing. Mann hatte gelegentlich in seminaristischen Übungen eine allgemeine Berechnung eines dreistäbigen Systems durchgeführt und dabei die Eckmomente als statisch unbestimmte Grössen eingesetzt, eine Rechnung die auch im allgemeinsten Falle zu ausserordentlich übersichtlichen Ergebnissen führt. Mit Einverständnis von Herrn Prof.Dr.Ing.Mann habe ich diese Entwicklung in meine Arbeit übernommen. Bei der Anwendung auf vorliegende Verhältnisse gestal-

tet sich das Ergebnis wegen der Symmetrie besonders einfach.

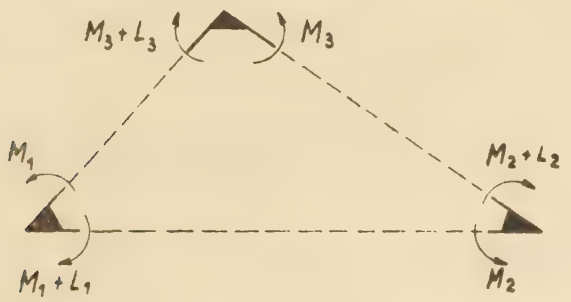
Wir lassen jetzt die zweite Berechnung des Trägerelementes, das sich ja aus zwei dreistäbigen Einzelsystemen zusammensetzt, folgen :

Es genügt, ein Dreieck allgemein zu betrachten. - Bezeichnungen s.Fig.7 -



Die Knoten seien durch ein im Gleichgewicht befindliches Kräftesystem belastet. Dazu gehören auch Belastungen durch Momente L_1, L_2 und L_3 .

Die Endmomente an den Stäben seien :



Die Beiträge von M_1 zu den Normalkräften sind

für den Stab s_1 : $N = - \frac{M_1}{h_1}$

s_2 : $N = + \frac{M_1}{h_1} \cdot \cos\alpha_3$

s_3 : $N = + \frac{M_1}{h_1} \cdot \cos\alpha_2$

Das im Gleichgewicht befindliche Kräftesystem

P_1, P_2, P_3 und L_1, L_2, L_3 bedingt

im Stab s_1 : $N = N_{01}$

s_2 : $N = N_{02}$

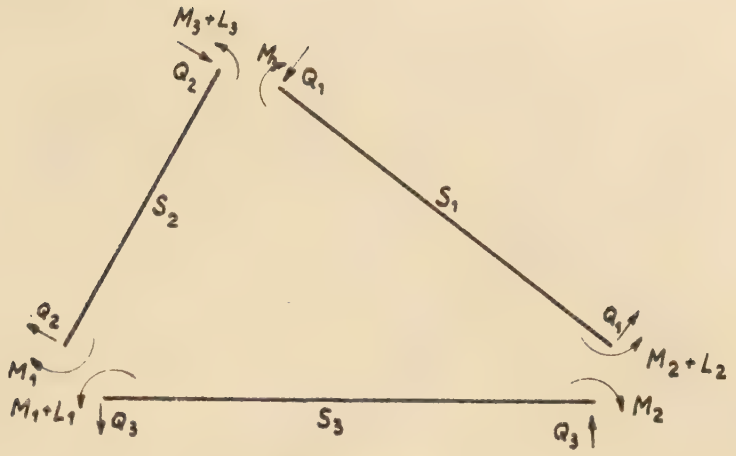
s_3 : $N = N_{03}$.

Im ganzen erhält man die Normalkräfte :

$$N_1 = N_{01} - \frac{M_1}{h_1} + \frac{M_2}{h_2} \cdot \cos\alpha_3 + \frac{M_3}{h_3} \cdot \cos\alpha_2 .$$

$$N_2 = N_{02} - \frac{M_2}{h_2} + \frac{M_3}{h_3} \cos\alpha_1 + \frac{M_1}{h_1} \cdot \cos\alpha_3 .$$

$$N_3 = N_{03} - \frac{M_3}{h_3} + \frac{M_1}{h_1} \cdot \cos\alpha_2 + \frac{M_2}{h_2} \cdot \cos\alpha_1 .$$



Die Querkräfte bestimmen sich zu :

$$Q_1 = \frac{M_3 - M_2 - L_2}{s_1}$$

$$Q_2 = \frac{M_3 + L_3 - M_1}{s_2}$$

$$Q_3 = \frac{M_2 - M_1 - L_1}{s_3}$$

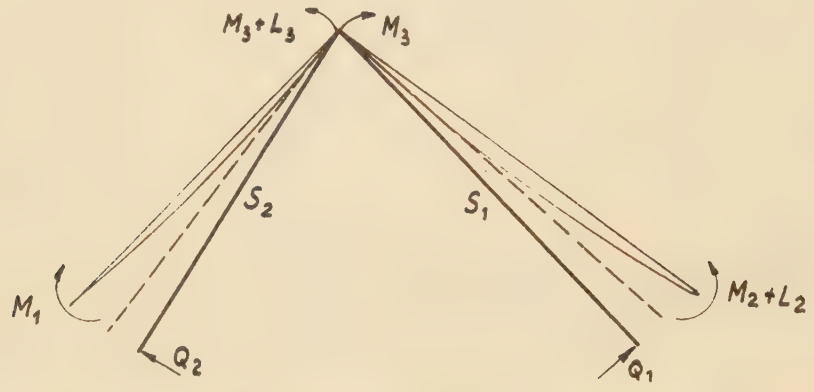
Die Winkeländerungen an den Knotenpunkten lassen sich in zweifacher Weise ausdrücken. Einmal bestimmen sie sich aus den Normalkräften, ein andermal aus den Biegungsmomenten und den Querkräften. Ihre Gleichsetzung liefert die Elastizitätsgleichungen für die Momente M_1, M_2 und M_3 .

Die Sehnenformel ergibt für die Winkeländerung $\Delta \alpha_3$ am Knoten 3 folgende Beziehung :

$$\Delta s_3 = \Delta s_2 \cdot \cos\alpha_1 + \Delta s_1 \cdot \cos\alpha_2 + h_3 \cdot \Delta\alpha_3 .$$

Es folgt:

$$\Delta\alpha_3 = \frac{1}{h_3}\left(\frac{N_3}{F_3}\cdot\frac{s_3}{E} - \frac{N_2}{F_2}\cdot\frac{s_2}{E}\cdot\cos\alpha_1 - \frac{N_1}{F_1}\cdot\frac{s_1}{E}\cdot\cos\alpha_2\right).$$



Der zweite Ausdruck für $\Delta\alpha_3$ - errechnet aus Momenten und Querkräften - lautet :

$$\Delta\alpha_3 = 1/6\left\{ M_1\cdot s_2' + 2(M_3+L_3)\cdot s_2' + 2M_3\cdot s_1' + (M_2+L_2)\cdot s_1' + \frac{M_3+L_3-M_1}{s_2}\cdot\frac{K_2}{F_2\cdot G} + \frac{M_3-M_2-L_2}{s_1}\cdot\frac{K_1}{F_1\cdot G}\right\}$$

Dabei ist gesetzt : $s' = \frac{s}{EJ}$.

Wir multiplizieren mit $6EJ_c$ aus, setzen $s \cdot \frac{J_c}{J} = 1$,

schreiben für

$$6K \cdot \frac{EJ_c}{s\cdot F\cdot G} = 6K \cdot \frac{E}{G} \cdot \frac{J}{Fs^2} \cdot 1, \text{ und setzen}$$

$$\nu = 6K \cdot \frac{E}{G} \cdot \frac{J}{Fs^2} .$$

Dann lässt sich die Elastizitätsgleichung am Knoten 3 schreiben :

$$M_1 \cdot l_2(1-\nu_2)+M_3\left\{2\cdot l_2(1+\tfrac{1}{2}\nu_2)+2l_1(1+\tfrac{1}{2}\nu_1)\right\}+M_2\cdot l_1(1-\nu_1)=$$

$$6EJ_c\cdot\Delta\alpha_3-2L_3\cdot l_2(1+\tfrac{1}{2}\nu_2)-L_2\cdot l_1(1-\nu_1).$$

Nach Gleichung 1 war

$$\Delta\alpha_3 = \frac{1}{h_3}\left(\frac{N_3}{F_3}\cdot\frac{s_3}{E} - \frac{N_2}{F_2}\cdot\frac{s_2}{E}\cdot\cos\alpha_1 - \frac{N_1}{F_1}\cdot\frac{s_1}{E}\cdot\cos\alpha_2\right)$$

Wir benutzen :

$$h_3 = s_2 \cdot \sin\alpha_1 = s_1 \cdot \sin\alpha_2 ,$$

$$s_3 = h_3 \cdot \operatorname{ctg}\alpha_1 + h_3 \cdot \operatorname{ctg}\alpha_2 .$$

Dann folgt :

$$\Delta\alpha_3 = \frac{1}{E}\left\{\left(\frac{N_3}{F_3} - \frac{N_2}{F_2}\right)\cdot\operatorname{ctg}\alpha_1+\left(\frac{N_3}{F_3} - \frac{N_1}{F_1}\right)\cdot\operatorname{ctg}\alpha_2\right\}_o+\phi_3.$$

Wir setzen $\frac{s}{EF} = s''$ und erhalten :

$$\phi_3 = -\frac{M_3}{\frac{h_3^2}{2}}\left\{s''_3 + s''_2\cdot\cos^2\alpha_1 + s''_1\cdot\cos^2\alpha_2\right\}$$

$$+\frac{M_1}{h_3h_1}\left\{(s''_3 + s''_1)\cdot\cos\alpha_2 - s''_2\cdot\cos\alpha_1\cdot\cos\alpha_3\right\}$$

$$+\frac{M_2}{h_3h_2}\left\{(s''_3 + s''_2)\cdot\cos\alpha_1 - s''_1\cdot\cos\alpha_2\cdot\cos\alpha_3\right\}$$

Wir benutzen :

$$\cos\alpha_1 \cdot \cos\alpha_3 + \cos\alpha_2 = \sin\alpha_1 \cdot \sin\alpha_3$$

$$\cos\alpha_2 \cdot \cos\alpha_3 + \cos\alpha_1 = \sin\alpha_2 \cdot \sin\alpha_3 .$$

Es folgt :

$$\phi_3 = -\frac{M_3}{h_3^2}\left\{(s_1'' + s_2'' + s_3'') - s_2'' \sin^2\alpha_1 - s_1'' \sin^2\alpha_2\right\}$$

$$+\frac{M_1}{h_3 h_1}\left\{(s_1'' + s_2'' + s_3'')\cos\alpha_2 - s_2'' \sin\alpha_1 \sin\alpha_3\right\}$$

$$+\frac{M_2}{h_3 h_2}\left\{(s_1'' + s_2'' + s_3'')\cos\alpha_1 - s_1'' \sin\alpha_2 \sin\alpha_3\right\}.$$

Wir führen den Inhalt des Dreiecks ein

$$2f = h_3 \cdot s_3 = h_3^2 \left(\operatorname{ctg}\alpha_1 + \operatorname{ctg}\alpha_2\right)$$

$$\frac{1}{h_3^2} = \frac{\operatorname{ctg}\alpha_1 + \operatorname{ctg}\alpha_2}{2f} \quad ; \quad \text{ferner ist :}$$

$$\frac{\cos\alpha_2}{h_3 \cdot h_1} = \frac{\operatorname{ctg}\alpha_2}{2f} \; ; \qquad \frac{\cos\alpha_1}{h_3 \cdot h_2} = \frac{\operatorname{ctg}\alpha_1}{2f} \quad \text{usw.}$$

$$\frac{s_2 \cdot \sin^2\alpha_1}{h_3^2} = \frac{1}{s_2} \; ; \qquad \frac{s_1 \cdot \sin^2\alpha_2}{h_3^2} = \frac{1}{s_1} .$$

$$\frac{s_2 \sin\alpha_1 \sin\alpha_3}{h_3 \; h_1} = \frac{1}{s_2} \; ; \qquad \frac{s_1 \sin\alpha_2 \sin\alpha_3}{h_3 \cdot h_2} = \frac{1}{s_1}$$

Damit folgt:

$$\phi_3 = -\frac{M_3}{E}\left\{\left(\sum\frac{s}{F}\right)\left(\frac{\operatorname{ctg}\alpha_1+\operatorname{ctg}_2}{2f}\right)-\frac{1}{F_2s_2}-\frac{1}{F_1s_1}\right\}$$

$$+\frac{M_1}{E}\left\{\left(\sum\frac{s}{F}\right)\frac{\operatorname{ctg}\alpha_2}{2f}-\frac{1}{F_2s_2}\right\}$$

$$+\frac{M_2}{E}\left\{\left(\sum\frac{s}{F}\right)\frac{\operatorname{ctg}\alpha_1}{2f}-\frac{1}{s_1F_1}\right\}$$

Wir setzen :

$$a_1 = 6J_c\left\{\left(\sum\frac{s}{F}\right)\frac{\operatorname{ctg}\alpha_1}{2f}-\frac{1}{F_1s_1}\right\}$$

$$a_2 = 6J_c\left\{\left(\sum\frac{s}{F}\right)\frac{\operatorname{ctg}\alpha_2}{2f}-\frac{1}{F_2s_2}\right\}$$

$$a_3 = 6J_c\left\{\left(\sum\frac{s}{F}\right)\frac{\operatorname{ctg}\alpha_3}{2f}-\frac{1}{F_3s_3}\right\}$$

$$l_1 = s_1\cdot\frac{J_c}{J_1}\;;\; l_2 = s_2\cdot\frac{J_c}{J_2}\;;\; l_3 = s_3\cdot\frac{J_c}{J_3}\;.$$

Dann lässt sich die Elastizitätsgleichung am Knotenpunkt 3 schreiben :

$$M_1\cdot l_2\,(1-\nu_2)+M_3\left\{2l_2\,(1+\tfrac{1}{2}\nu_2)+2\cdot l_1(1+\tfrac{1}{2}\nu_2)\right\}+M_2\cdot l_1(1-\nu_1)=$$

$$6J_c\left\{\left(\frac{N_3}{F_3}-\frac{N_2}{F_2}\right)\operatorname{ctg}\alpha_1+\left(\frac{N_3}{F_3}-\frac{N_1}{F_1}\right)\operatorname{ctg}\alpha_2\right\}\;.$$

$$-M_3(a_1+a_2)+M_1\cdot a_2+M_2\cdot a_1-2\cdot L_3\cdot l_2(1+\tfrac{1}{2}\nu_2)-L_2\cdot l_1(1-\nu_1)\,.$$

Wir setzen :

$$\alpha_1 = l_1 \left(1 - \nu_1 \right) - a_1 \quad ;$$

$$\alpha_2 = l_2 \left(1 - \nu_2 \right) - a_2 \quad ;$$

$$\alpha_3 = l_3 \left(1 - \nu_3 \right) - a_3 \quad ;$$

$$\beta_1 = 2.l_3 \left(1 + \tfrac{1}{2} \nu_3 \right) + 2.l_2 \left(1 + \tfrac{1}{2} \nu_3 \right) + a_2 + a_3 \quad ;$$

$$\beta_2 = 2.l_1 \left(1 + \tfrac{1}{2} \nu_1 \right) + 2.l_3 \left(1 + \tfrac{1}{2} \nu_3 \right) + a_3 + a_1 \quad ;$$

$$\beta_3 = 2.l_2 \left(1 + \tfrac{1}{2} \nu_2 \right) + 2.l_1 \left(1 + \tfrac{1}{2} \nu_1 \right) + a_1 + a_2 \quad ;$$

$$C_3 = - \left\{ 2L_3.l_2 \left(1 + \tfrac{1}{2} \nu_2 \right) + L_2.l_1 \left(1 - \nu_1 \right) \right\}$$
$$+ 6J_c \left\{ \left(\frac{N_3}{F_3} - \frac{N_2}{F_2} \right) \operatorname{ctg} \alpha_1 + \left(\frac{N_3}{F_3} - \frac{N_1}{F_1} \right) \operatorname{ctg} \alpha_2 \right\} o;$$

$$C_2 = - \left\{ 2L_2.l_1 \left(1 + \tfrac{1}{2} \nu_1 \right) + L_1.l_3 \left(1 - \nu_3 \right) \right\}$$
$$+ 6J_c \left\{ \left(\frac{N_2}{F_2} - \frac{N_1}{F_1} \right) \operatorname{ctg} \alpha_3 + \left(\frac{N_2}{F_2} - \frac{N_3}{F_3} \right) \operatorname{ctg} \alpha_1 \right\} o;$$

$$C_1 = - \left\{ 2L_1.l_3 \left(1 + \frac{\nu_3}{2} \right) + L_3.l_2 \left(1 - \nu_2 \right) \right\}$$
$$+ 6J_c \left\{ \left(\frac{N_1}{F_1} - \frac{N_3}{F_3} \right) \operatorname{ctg} \alpha_2 + \left(\frac{N_1}{F_1} - \frac{N_2}{F_2} \right) \operatorname{ctg} \alpha_3 \right\} o;$$

Dann lassen sich die 3 Elastizitätsgleichungen schreiben:

$$M_1 \cdot \beta_1 + M_2 \alpha_3 + M_3 \alpha_2 = C_1 \cdot$$

$$M_1 \cdot \alpha_3 + M_2 \beta_2 + M_3 \alpha_1 = C_2 \cdot$$

$$M_1 \cdot \alpha_2 + M_2 \alpha_1 + M_3 \beta_3 = C_3 \cdot$$

Für vorliegende Arbeit wird stets angenommen, dass in dem Dreieck

$s_1 = s_2$; $F_1 = F_2$; $J_1 = J_2$ und $\alpha_1 = \alpha_2$ ist.

Deswegen wird :

$a_1 = a_2$; $l_1 = l_2$ und $\nu_1 = \nu_2$.

Es folgt : $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$; $\beta_1 = \beta_2 = \beta$

Damit wird

$$M_1 \beta + M_2 \alpha_3 + M_3 \alpha = C_1$$

$$M_1 \alpha_3 + M_2 \beta + M_3 \alpha = C_2$$

$$M_1 \alpha + M_2 \alpha + M_3 \beta_3 = C_3 \cdot$$

Es folgt :

$$(M_1 - M_2)(\beta - \alpha_3) = C_1 - C_2 \cdot$$

$$(M_1 + M_2)(\beta + \alpha_3) + 2\alpha M_3 = C_1 + C_2 \cdot$$

$$(M_1 + M_2)\alpha + \beta_3 \cdot M_3 = C_3 \cdot$$

Dann wird :

$$M_1 + M_2 = \frac{(C_1 + C_2) \cdot \beta_3 - 2\alpha \cdot C_3}{\beta_3 (\beta + \alpha_3) - 2\alpha^2} \quad .$$

$$M_1 - M_2 = \frac{1}{(\beta - \alpha_3)} (C_1 - C_2) \quad .$$

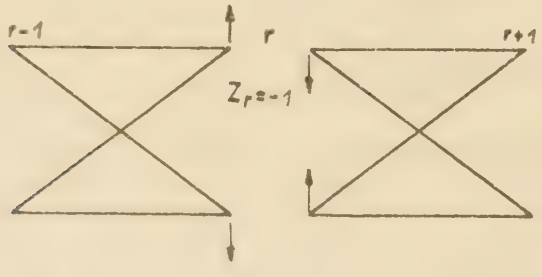
$$M_3 = \frac{1}{\beta_3} \left[C_3 - \alpha (M_1 + M_2) \right] \quad .$$

Die Werte M_1 und M_2 lassen sich dann zahlenmässig sofort finden.

Das Element ist vorerst für die Zustände

$X_r = -1$; $Y_r = -1$ und $Z_r = -1$ zu berechnen.

1.) Zustand $Z_r = -1$.



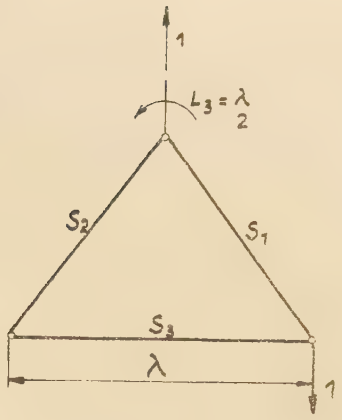
Wiederum genügt es, ein Dreieck zu berechnen.

Man erhält :

$$N_{01} = \frac{1}{\sin \alpha_2}$$

$$N_{02} = \operatorname{ctg} \alpha_2 \cdot \cos \alpha_1$$

$$N_{03} = -\operatorname{ctg} \alpha_2 \cdot$$

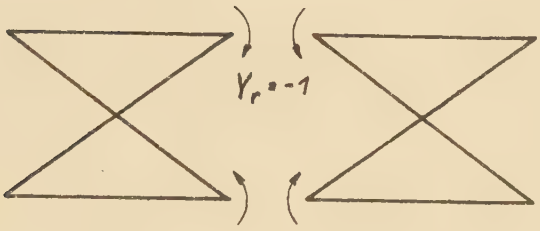


$$L_1 = 0$$

$$L_2 = 0$$

$$L_3 = + \frac{\lambda}{2} \cdot$$

2.) Zustand $Y_r = -1$.

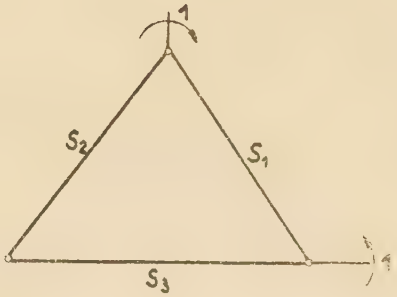


Man erhält :

$$N_{01} = - \frac{1}{h_3} \cos \alpha_2$$

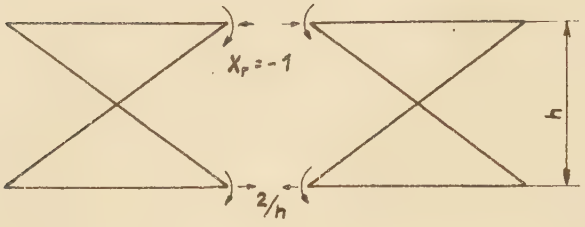
$$N_{02} = - \frac{1}{h_3} \cos \alpha_1$$

$$N_{03} = + \frac{1}{h_3}$$



$$L_1 = 0 \; ; \quad L_2 = +1 \; ; \quad L_3 = -1 \cdot$$

3.) Zustand $X_r = -1$.

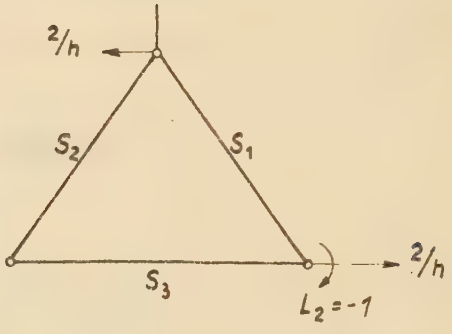


Man erhält :

$$N_{01} = \frac{2}{h} \cos \alpha_2$$

$$N_{02} = 0$$

$$N_{03} = 0$$

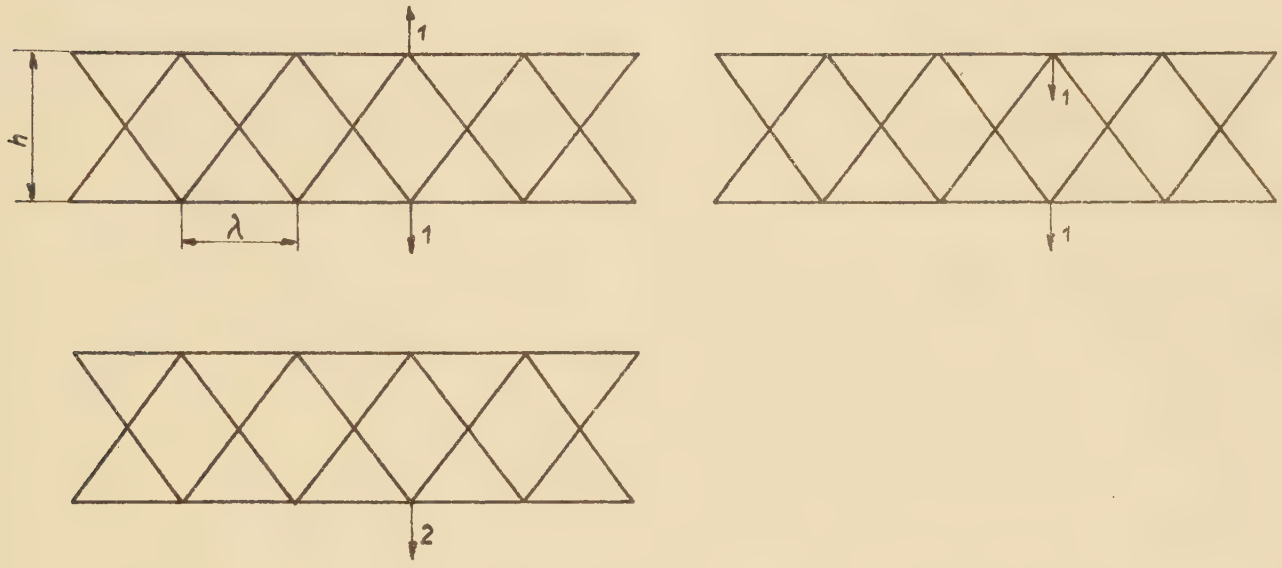


$$L_1 = 0 \quad ; \quad L_2 = -1 \quad ; \quad L_3 = 0 .$$

Es lassen sich jetzt die jedem Zustand zugehörigen Werte C_1, C_2 und C_3 ermitteln, die in das Gleichungssystem S.17 eingesetzt die Momente M_1, M_2 und M_3 ergeben.

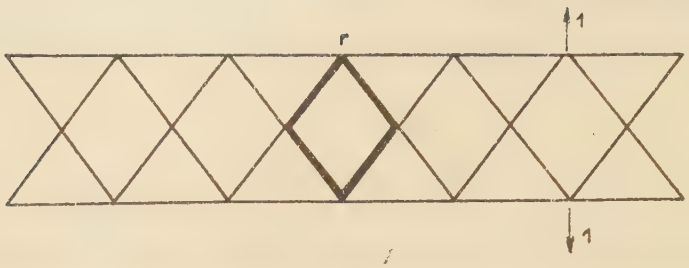
Aufstellung der Elastizitätsgleichungen am Punkte r.

Der Träger wird einmal mit 2 symmetrischen Lasten 1 belastet gedacht, das andere Mal mit 2 antimetrischen Lasten 1 . Siehe die nächsten Figuren .



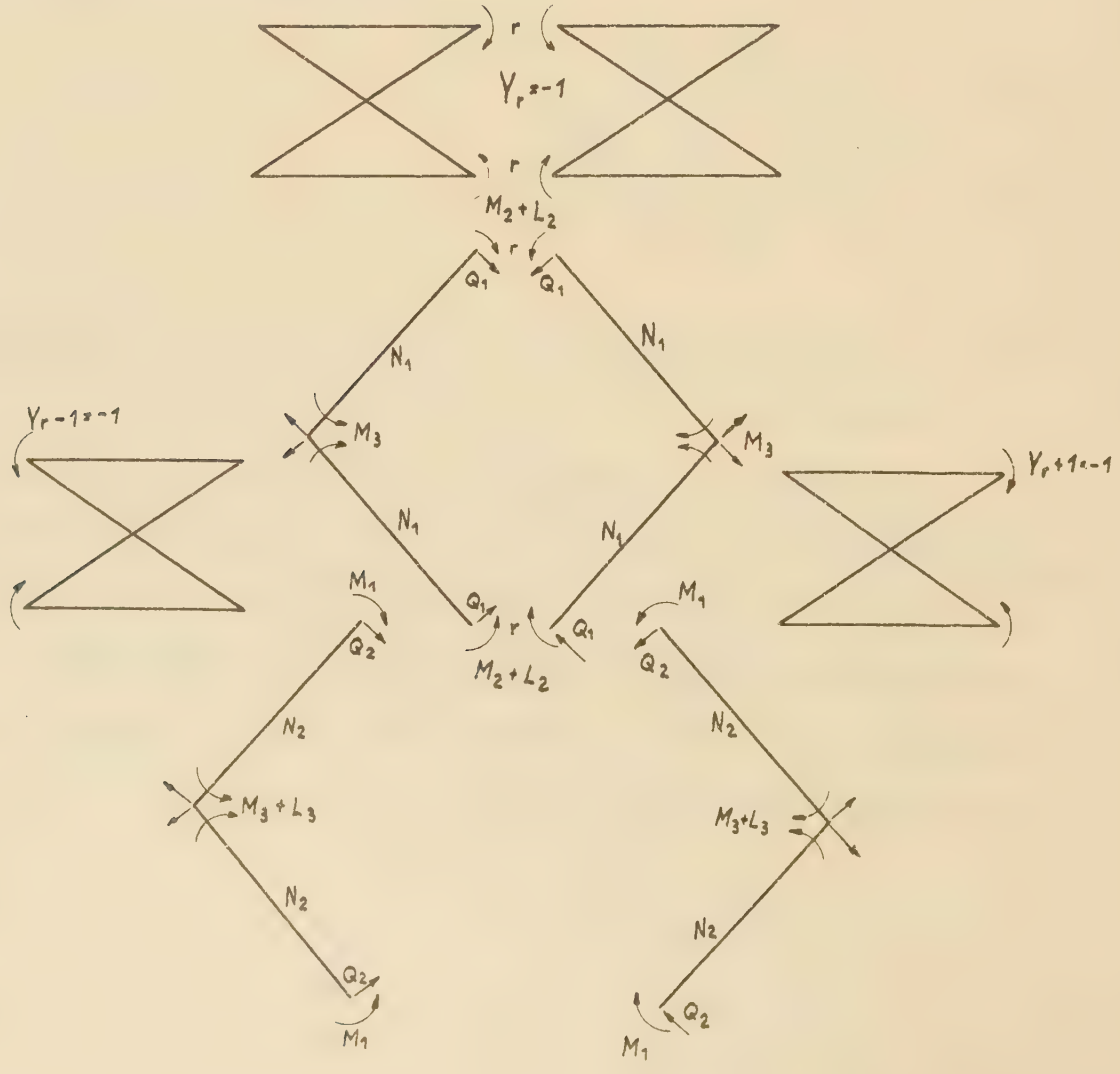
Beide Belastungen überlagert ergeben eine Einzellast 2 am unteren bezw. am oberen Gurt.

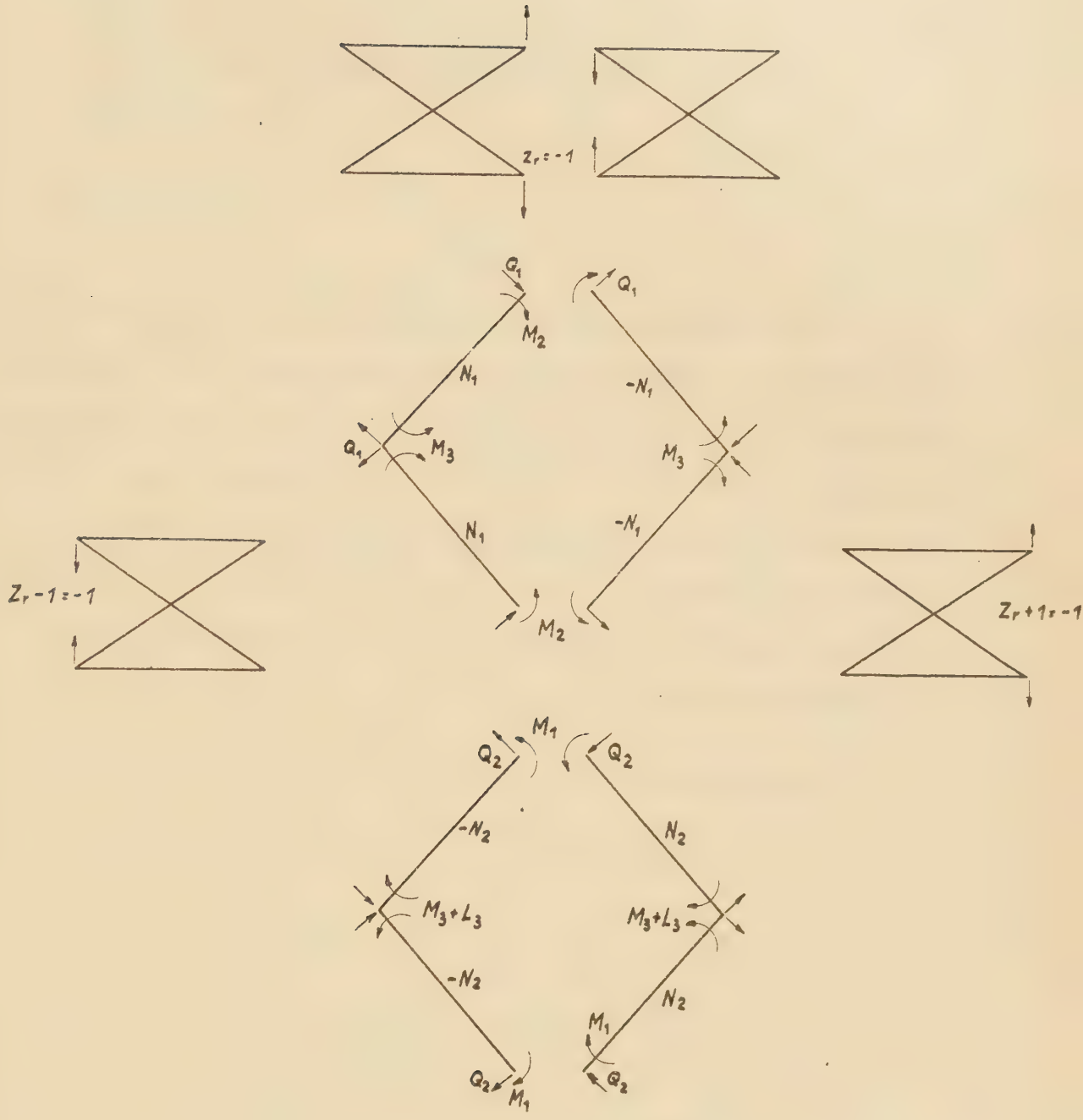
Der erste Belastungsfall bedingt X = 0, da die Gurtquerschnitte gleich gross sind und die Diagonalen gleichen Querschnitt haben. Es treten nur die statisch unbestimmten Grössen Y und Z auf. Sind diese Grössen bekannt, dann ist der ganze Kraft - bezw. Formänderungszustand des Trägers bestimmt.



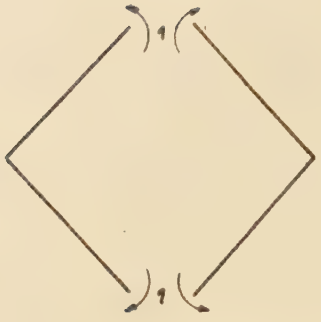
Es genügt, am Knoten r den stark ausgezogenen Halbrahmen rechts und links von r herauszunehmen. Sein Kraft - bezw. Formänderungszustand lässt sich durch die Grössen Y_{r-1} ; Y_r ; Y_{r+1} ; Z_{r-1} ; Z_r ; Z_{r+1} ausdrücken. Es sei noch erwähnt, dass die Lastgruppe rechts von r steht.

(s. letzte Figur) .





Die letzten Figuren geben jeweils den Belastungszustand an und dessen Einwirkung auf die beiden Halbrah - men rechts und links vom Knoten r.



Wir belasten die Halbrahmen mit den Endmomenten = 1, entnehmen die Formänderung der wirklichen Belastung und erhalten die gesamte Änderung der beiden Winkel am oberen und unteren Knoten r, die wir = 0 zu setzen haben, da der Winkel erhalten bleibt. In der Rechnung sind jetzt die wirklichen Werte Y_{r-1}, Y_r u.s.w. einzuführen. Wir erhalten - Normalkräfte und Querkräfte geben keinen Beitrag - folgende Gleichung :

$$
\begin{aligned}
& Y_{r-1}\left\{(M_1 + M_3 + L_3)\ \frac{s}{2} \cdot 2\right\}_y \\
+\ & Y_r\ 2\left\{(M_3 + M_2 + L_2)\ \frac{s}{2} \cdot 2\right\}_y \\
+\ & Y_{r+1}\left\{(M_1 + M_3 + L_3)\ \frac{s}{2} \cdot 2\right\}_y \\
-\ & Z_{r-1}\left\{(M_1 + M_3 + L_3)\ \frac{s}{2} \cdot 2\right\}_z \\
+\ & (Z_r - Z_r)\left\{(M_2 + M_3)\ \frac{s}{2} \cdot 2\right\}_z \\
+\ & Z_{r+1}\left\{(M_1 + M_3 + L_3)\ \frac{s}{2} \cdot 2\right\}_z = 0 .
\end{aligned}
$$

(Der Index y (z) soll andeuten, dass die in der Klammer stehenden Werte dem Zustand $Y_r = -1$ bezw. $Z_r = -1$ entnommen sind.)

Wir setzen :

$$(M_1 + M_3 + L_3)_y = \alpha$$

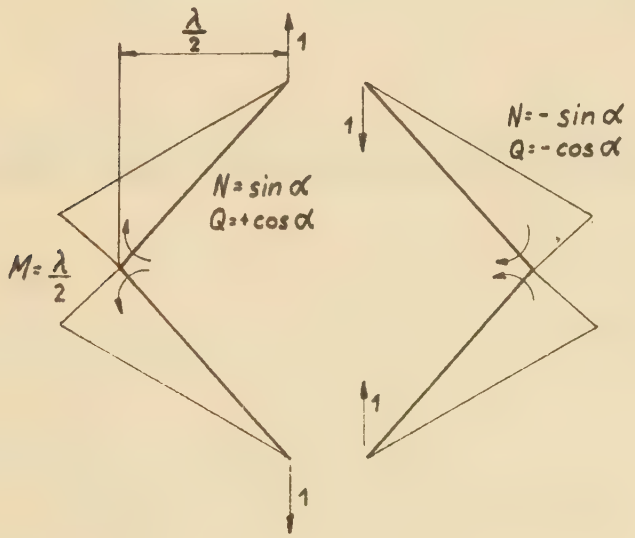
$$2(M_3 + M_2 + L_2)_y = \beta$$

$$-(M_1 + M_3 + L_3)_z = \gamma$$

Dann lässt sich obige Gleichung schreiben :

$$\alpha Y_{r-1} + \beta Y_r + \alpha Y_{r+1} + \gamma Z_{r-1} - \gamma Z_{r+1} = 0 .$$

Ein zweites Mal belasten wir die Halbrahmen mit je 2 Einzellasten = 1 .



Wir erhalten obigen Kraftzustand. Wir ordnen diesem Kraftzustand den wirklichen Formänderungszustand zu und erhalten aus der Arbeitsgleichung die Verschiebungen der Rahmenenden in Richtung der Kräfte 1. Die Summe der Grössen am rechten und linken Halbrahmen muss = 0 sein. Diese Bedingung liefert die 2. Elastizitätsgleichung an den Punkten r.

1.) Beiträge der Momente :

$$
\begin{aligned}
& Y_{r-1} \left\{ \frac{2s}{6} \cdot M \left[M_1 + 2 \left(M_3 + L_3 \right) \right] \right\}_y \\
& + Y_r \left\{ \text{Beitrag} = 0 \right\} \\
& + Y_{r+1} \left\{ - \frac{2s}{6} \cdot M \left[M_1 + 2 \left(M_3 + L_3 \right) \right] \right\}_y \\
& - Z_{r-1} \left\{ \frac{2s}{6} \cdot M \left[M_1 + 2 \left(M_3 + L_3 \right) \right] \right\}_z \\
& + Z_r \left\{ \frac{2s}{6} \cdot M \left(M_2 + 2M_3 \right) \right\}_z \cdot 2 \\
& - Z_{r+1} \left\{ \frac{2s}{6} \cdot M \left[M_1 + 2 \left(M_3 + L_3 \right) \right] \right\}_z \cdot
\end{aligned}
$$

2.) Beiträge der Normalkräfte und Querkräfte.

$$
Y_{r-1} \cdot 2s \left\{ -\sin\alpha \cdot N_2 \frac{J_d}{F_d} + \cos\alpha \cdot Q_2 \cdot K_d \cdot \frac{E}{G} \cdot \frac{J_d}{F_d} \right\}_y
$$

$$+ Y_{r+1} \cdot 2s \left\{ \sin\alpha N_2 \frac{J_d}{F_d} - \cos\alpha Q_2 \cdot K_d \cdot \frac{E}{G} \cdot \frac{J_d}{F_d} \right\} y$$

$$+ Z_{r-1} \cdot 2s \left\{ N_2 \cdot \sin\alpha \cdot \frac{J_d}{F_d} - \cos\alpha Q_2 \cdot K_d \cdot \frac{E}{G} \cdot \frac{J_d}{F_d} \right\} z$$

$$+ Z_r \cdot 4s \left\{ -N_1 \cdot \sin\alpha \cdot \frac{J_d}{F_d} + \cos\alpha \cdot Q_1 \cdot K_d \cdot \frac{E}{G} \cdot \frac{J_d}{F_d} \right\} z$$

$$+ Z_{r+1} \cdot 2s \left\{ N_2 \cdot \sin\alpha \cdot \frac{J_d}{F_d} - \cos\alpha Q_2 \cdot K_d \cdot \frac{E}{G} \cdot \frac{J_d}{F_d} \right\} z .$$

Wir setzen :

$$-\mu = \left\{ \frac{M}{6} \left[M_1 + 2(M_3 + L_3) \right] - N_2 \sin\alpha \frac{J_d}{F_d} + Q_2 \cos\alpha K_d \cdot \frac{E}{G} \cdot \frac{J_d}{F_d} \right\} y ,$$

$$+ \varphi = \left\{ - \frac{M}{6} \left[M_1 + 2(M_3 + L_3) \right] + N_2 \sin\alpha \frac{J_d}{F_d} - Q_2 \cos\alpha K_d \cdot \frac{E}{G} \cdot \frac{J_d}{F_d} \right\} z ,$$

$$+ \chi = \left\{ \frac{M}{6} (M_2 + 2M_3) - N_1 \sin\alpha \frac{J_d}{F_d} + Q_1 \cos\alpha K_d \cdot \frac{E}{G} \cdot \frac{J_d}{F_d} \right\} 2 z .$$

Dann lässt sich die 2.Elastizitätsgleichung schreiben :

$$-\mu Y_{r-1} + \mu Y_{r+1} + \varphi Z_{r-1} + \chi Z_r + \varphi Z_{r+1} = 0 .$$

Es bestehen also an der Stelle r die beiden Elastizitätsgleichungen :

$$\alpha Y_{r-1} + \beta Y_r + \alpha Y_{r+1} + \gamma Z_{r-1} - \gamma Z_{r+1} = 0 .$$

$$-\mu Y_{r-1} + \mu Y_{r+1} + \varphi Z_{r-1} + \chi Z_r + \varphi Z_{r+1} = 0 .$$

Da sie sich an jedem Knoten des Trägers aufstellen lassen, kann man sie als 2 simultane Differenzengleichungen auffassen. Man setzt :

$$Y_r = B.b^r \qquad Z_r = C.b^r$$

und findet :

$$B.b^{r-1}\,(\alpha+\beta.b+\alpha.b^2) + C.b^{r-1}(\gamma-\gamma.b^2) = 0\,.$$

$$B.b^{r-1}\,(-\mu+\mu.b^2) + C.b^{r-1}\,(\xi+\chi.b+\xi.b^2) = 0.$$

Wir setzen :

$$\alpha\xi + \gamma\mu = \alpha_1$$

$$\alpha\chi + \xi\beta = \beta_1$$

$$2\alpha\xi + \beta\chi - 2\gamma\mu = \gamma_1$$

und erhalten zur Bestimmung der Werte b eine reziproke Gleichung 4.Grades :

$$\alpha_1 . b^4 + \beta_1 . b^3 + \gamma_1 . b^2 + \beta_1 . b + \alpha_1 = 0.$$

Wir setzen : $b + \frac{1}{b} = u$ und erhalten :

$$u^2 + \frac{\beta_1}{\alpha_1} . u + \left(\frac{\gamma_1}{\alpha_1} - 2\right) = 0.$$

$$u_{1,2} = -\frac{\beta_1}{2\alpha_1} \pm \sqrt{\left(\frac{\beta_1}{2\alpha_1}\right)^2 - \frac{\gamma_1}{\alpha_1} + 2}\,.$$

Aus $b + \frac{1}{b} = u$

$b^2 + 1 - b \cdot u = 0$ folgt :

$$b = \frac{u}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{u}{2}\right)^2 - 1} \,.$$

Die gesamte Lösung lautet :

$$Y_r = B_1 \cdot b_1^r + B_2 \cdot b_2^r + B_3 \cdot b_3^r + B_4 \cdot b_4^r \,.$$

$$Z_r = C_1 \cdot b_1^r + C_2 \cdot b_2^r + C_3 \cdot b_3^r + C_4 \cdot b_4^r \,.$$

Durch C_1 ist B_1 mitbestimmt . Es ist :

$$B_1 = - C_1 \frac{\gamma (1 - b_1^2)}{\alpha (1+b_1^2) + \beta b_1}$$

Analog folgen B_2 ; B_3 und B_4 .

Wir setzen noch :

$$a = - \frac{\gamma (1-b_1^2)}{\alpha (1+b_1^2) + \beta b_1} \,.$$

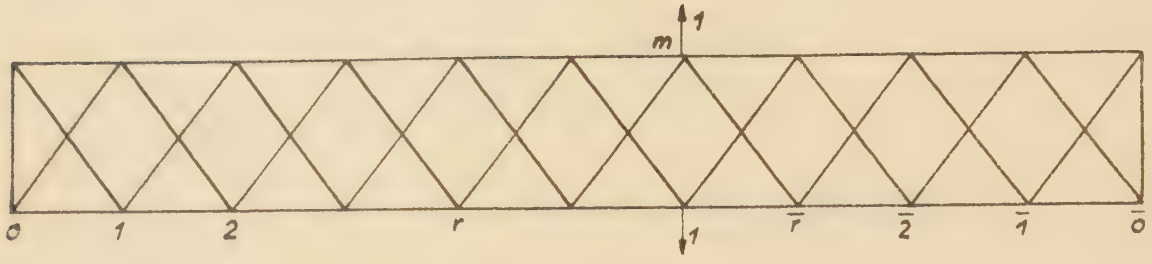
$$a = - \frac{\gamma (1-b_2^2)}{\alpha (1+b_2^2 + \beta b_2} \,.$$

$$b = - \frac{\gamma (1-b_3^2)}{\alpha (1+b_3^2) + \beta b_3} \,.$$

$$b = - \frac{\gamma (1-b_4^2)}{\alpha (1+b_4^2) + \beta b_4} \,.$$

Es folgt : $B_1 = \alpha \cdot C_1$; $B_2 = -\alpha \cdot C_2$;

$B_3 = \beta \cdot C_3$; $B_4 = -\beta \cdot C_4$;



Bestimmung der Konstanten.

Die Lasten 1 stehen an der Stelle m von links aus gerechnet. Wir zählen, wie bereits festgelegt, von links aus $0, 1, 2 \ldots\ldots r$ bis zur Laststellung m, von rechts aus $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2} \ldots\ldots \bar{r}$ bis zur Laststellung $\bar{m}$.
Im linken Teil des Trägers gilt die Lösung :

$$Y_r = B_1 \cdot B_1^r + B_2 \cdot b_2^r + B_3 \cdot b_3^r + B_4 \cdot b_4^r \quad .$$

$$Z_r = C_1 \cdot b_1^r + C_2 \cdot b_2^r + C_3 \cdot b_3^r + C_4 \cdot b_4^r \quad .$$

---

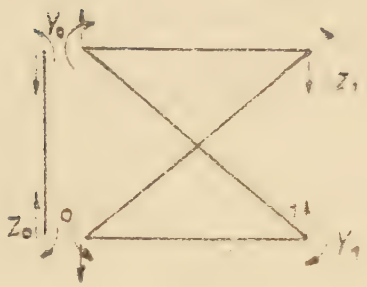
im rechten

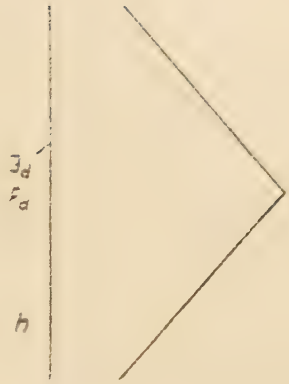
$$\bar{Y}_r = \bar{B}_1 \cdot b_1^r + \bar{B}_2 \cdot b_2^r + \bar{B}_3 \cdot b_3^r + \bar{B}_4 \cdot b^r_4$$

$$\bar{Z}_r = \bar{C}_1 \cdot b_1^r + \bar{C}_2 \cdot b^r_2 + \bar{C}_3 \cdot b_3^r + \bar{C}_4 \cdot b^r_4$$

Diese Konstanten bestimmen sich aus den Anfangs-und Endbedingungen und den Übergangsbedingungen an der Laststelle selbst.

1.) Anfangsbedingungen.





Es genügt, die Formänderungsbedingungen an dem Riegel und dem ersten Halbrahmen aufzustellen. Der Riegel habe die Länge h, den Querschnitt F_d und das Trägheitsmoment J_d. Die erste Elastizitätsgleichung sagt aus, dass der Winkel zwischen Riegel und Halbrahmen oben und unten erhalten bleibt, die 2. Elastizitätsgleichung saugt aus, dass die Öffnung der Rahmenenden gleich ist der Verlängerung des Riegels.

Es ist :

$$1.)\quad \lambda \frac{\sec\alpha}{2} \left\{ \alpha\, Y_1 + \frac{\beta}{2}\, Y_0 + \nu Z_0 - \gamma Z_1 \right\} + h \cdot Y_0 = 0,$$

worin $\nu = -(M_2 + M_3)_z$.

Wir dividieren Gl. 1 durch $\frac{\lambda \sec\alpha}{2}$ und erhalten :

$$\left(\frac{\beta}{2} + 2 \sin\alpha \right) \cdot Y_0 + \alpha Y_1 + \nu Z_0 - \gamma Z_1 = 0 .$$

Es ist :

$$Y_0 = B_1 + B_2 + B_3 + B_4 = a \cdot C_1 - a \cdot C_2 + b \cdot C_3 - b\, C_4 .$$

$$Y_1 = a \cdot C_1 \cdot b_1 - a \cdot C_2 \cdot b_2 + b \cdot C_3 \cdot b_3 - b \cdot C_4 \cdot b_4 .$$

$$Z_0 = C_1 + C_2 + C_3 + C_4 .$$

$$Z_1 = C_1 \cdot b_1 + C_2 \cdot b_2 + C_3 \cdot b_3 + C_4 \cdot b_4 .$$

Wir setzen :

$$K_1 = a \left(\frac{\beta}{2} + 2 \sin \alpha \right) + \gamma + b_1 \left(a\alpha - \varphi \right) .$$

$$K_2 = -a \left(\frac{\beta}{2} + 2 \sin \alpha \right) + \gamma - b_2 \left(a\alpha + \varphi \right) .$$

$$K_3 = b \left(\frac{\beta}{2} + 2 \sin \alpha \right) + \gamma + b_3 \left(b\alpha - \varphi \right) .$$

$$K_4 = -b \left(\frac{\beta}{2} + 2 \sin \alpha \right) + \gamma - b_4 \left(b\alpha + \varphi \right) .$$

und schreiben die letzte Form der Gleichung 1.) :

1.) $$C_1 \cdot K_1 + C_2 \cdot K_2 + C_3 \cdot K_3 + C_4 \cdot K_4 = 0.$$

Gleichung 2 lautet :

2.) $$\lambda \sec \alpha \left\{ \eta \cdot Y_0 + \mu \cdot Y_1 + \frac{\chi}{2} \cdot Z_0 + \zeta Z_1 \right\} - h \cdot \frac{J_d}{F_d} \cdot Z_0 = 0.$$

worin

$$\eta = \left\{ -\frac{1}{6} M \left(M_2 - L_2 + 2M_3 \right) + \right.$$

$$\left. + \sin \alpha \cdot \frac{J_d}{F_d} \cdot N_1 - \cos \alpha \, K_d \cdot \frac{E}{G} \cdot \frac{J_d}{F_d} \cdot Q_1 \right\} y$$

ist.

Wir dividieren durch $\lambda \sec \alpha$ und erhalten :

$$\eta \cdot Y_0 + \mu \cdot Y_1 + \left(\frac{\chi}{2} - \sin \alpha \cdot \frac{J_d}{F_d} \right) \cdot Z_0 + \xi \cdot Z_1 = 0.$$

Wir setzen die Werte für Y_0; Y_1; Z_0 und Z_1 ein .

Wir setzen :

$$K_1 = a\eta + \left(\frac{\chi}{2} - \sin \alpha \cdot \frac{J_d}{F_d} \right) + b_1 \, (\mu a + \xi)$$

$$k_2 = -a\eta + \left(\frac{\chi}{2} - \sin \alpha \cdot \frac{J_d}{F_d} \right) + b_2 \, (-\mu a + \xi)$$

$$k_3 = b\eta + \left(\frac{\chi}{2} - \sin \alpha \cdot \frac{J_d}{F_d} \right) + b_3 \, (\mu b + \xi)$$

$$k_4 = -b\eta + \left(\frac{\chi}{2} - \sin \alpha \cdot \frac{J_d}{F_d} \right) + b_4 \, (-\mu b + \xi)$$

Dann kann die 2. Anfangsbedingung geschrieben werden :

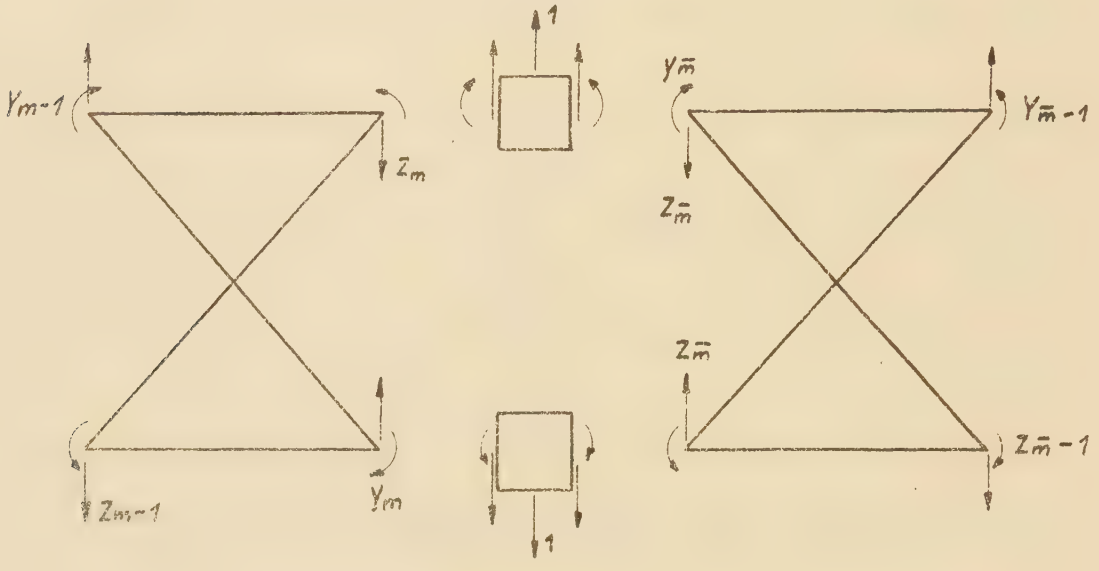
$$2.) \quad C_1 \cdot k_1 + C_2 \cdot k_2 + C_3 \cdot k_3 + C_4 \cdot k_4 = 0 .$$

Die beiden Endbedingungen ergeben genau dieselben Glei - chungen für die Werte $\bar{C}$. Es folgt :

$$3.) \quad \bar{C}_1 \cdot K_1 + \bar{C}_2 \cdot K_2 + \bar{C}_3 \cdot K_3 + C_4 \cdot K_4 = 0 .$$

$$4.) \quad \bar{C}_1 \cdot k_1 + \bar{C}_2 \cdot k_2 + \bar{C}_3 \cdot k_3 + \bar{C}_4 \cdot k_4 = 0 .$$

Es sei betont, dass diese vier Gleichungen für jede Laststellung zwischen $\bar{1}$ und $\bar{1}$ Gültigkeit haben. Man hat also die Werte K_1 und k_1 ..... nur einmal zu rechnen. Die weiteren 4 Gleichungen stellen wir an der Stelle auf, an der die Lasten ~~ent~~stehen . Es gilt dabei folgendes Kräftebild :



Die Gleichgewichtsbedingungen für die Kräfte am Kno - ten ergeben 2 weitere Beziehungen .

$$5.)\quad Z_m + Z_{\bar{m}} + 1 = 0 \,.$$

$$6.)\quad Y_m - Y_{\bar{m}} = 0 \,.$$

Wir setzen die entsprechenden Werte ein, die beiden Gleichungen lauten :

5.) $C_1 \cdot b_1^{m} + C_2 \cdot b_2^{m} + C_3 \cdot b_3^{m} + C_4 \cdot b_4^{m}$
$+ \bar{C}_1 \cdot b_1^{\bar{m}} + \bar{C}_2 \cdot b_2^{\bar{m}} + \bar{C}_3 \cdot b_3^{\bar{m}} + \bar{C}_4 \cdot b_4^{\bar{m}} = -1,0.$

6.) $\alpha C_1 b_1^{m} - \alpha C_2 b_2^{m} + \beta C_3 b_3^{m} - \beta C_4 b_4^{m}$
$-\alpha \bar{C}_1 b_1^{\bar{m}} + \alpha \bar{C}_2 b_2^{\bar{m}} - \beta \bar{C}_3 b_3^{\bar{m}} + \beta \bar{C}_4 b_4^{\bar{m}} = 0.$

Die letzten beiden Gleichungen lassen sich an den beiden dem Belastungsknoten benachbarten Halbrahmen wie früher aufstellen. Beide Rahmenenden müssen sich um gleiche Stücke öffnen. Man erhält:

7.) $-\mu Y_{m-1} + \varphi Z_{m-1} + \frac{\chi}{2} Z_m$
$+\mu Y_{\bar{m}-1} - \varphi Z_{\bar{m}-1} - \frac{\chi}{2} Z_m = 0.$

Wir setzen die Ausdrücke für Y_{m-1} .... ein und schreiben:

$$\psi_1' = (-\mu\alpha + \varphi) + \frac{\chi}{2} \cdot b_1$$
$$\psi_2' = (+\mu\alpha + \varphi) + \frac{\chi}{2} \cdot b_2$$
$$\psi_3' = (-\mu\beta + \varphi) + \frac{\chi}{2} \cdot b_3$$
$$\psi_4' = (+\mu\beta + \varphi) + \frac{\chi}{2} \cdot b_4.$$

Wir erhalten Gleichung 7 in der Form :

$$7.)\quad C_1 b_1^{m-1} \nu_1' + C_2 b_2^{m-1} \nu_2' + C_3 b_3^{m-1} \nu_3' + C_4 b_4^{m-1} \nu_4'$$
$$- \bar{C}_1 b_1^{\bar{m}-1} \nu_1' - \bar{C}_2 b_2^{\bar{m}-1} \nu_2' - \bar{C}_3 b_3^{\bar{m}-1} \nu_3' - \bar{C}_4 b_4^{\bar{m}-1} \nu_4' = 0 .$$

Ferner muss die Winkeländerung am Knoten m oben und unten zusammen = 0 werden. Es folgt :

$$\alpha Y_{m-1} + \frac{\beta}{2}(Y_m + Y_{\bar{m}}) + \alpha Y_{\bar{m}-1} + \gamma Z_{m-1} - \nu(Z_m + Z_{\bar{m}}) + \gamma Z_{\bar{m}-1} = 0.$$

Wir setzen die Ausdrücke für Y_{m-1} ..... ein, schreiben :

$$\mu_1 = \alpha(\alpha + \frac{\beta}{2} b_1) + \gamma - \nu b_1$$
$$\mu_2 = -\alpha(\alpha + \frac{\beta}{2} b_2) + \gamma - \nu b_2$$
$$\mu_3 = \alpha(\alpha + \frac{\beta}{2} b_3) + \gamma - \nu b_3$$
$$\mu_4 = -\alpha(\alpha + \frac{\beta}{2} b_4) + \gamma - \nu b_4$$

und erhalten die Gleichung 8 :

$$8.)\quad C_1 b_1^{m-1} \cdot \mu_1 + C_2 b_2^{m-1} \cdot \mu_2 + C_3 b_3^{m-1} \cdot \mu_3 + C_4 b_4^{m-1} \cdot \mu_4$$
$$+ \bar{C}_1 b_1^{\bar{m}-1} \cdot \mu_1 + \bar{C}_2 b_2^{\bar{m}-1} \cdot \mu_2 + \bar{C}_3 b_3^{\bar{m}-1} \cdot \mu_3 + \bar{C}_4 b_4^{\bar{m}-1} \cdot \mu_4 = 0.$$

Die Wurzel b_2 sei die kleinste, b_4 die nächst kleinere.

Wir lösen 1 und 3 nach C_2 bezw. $\bar{C}_2$ auf und erhalten :

$$C_2 = - C_1 \cdot \frac{K_1}{K_2} - C_3 \cdot \frac{K_3}{K_2} - C_4 \cdot \frac{K_4}{K_2} \cdot$$

Wir setzen : $\frac{K_1}{K_2} = m_1$, $\frac{K_3}{K_2} = m_2$, $\frac{K_4}{K_2} = m_3$ und [illegible]

$$C_2 = - C_1 m_1 - C_3 m_2 - C_4 m_3 \ ,$$

ebenso $$\bar{C}_2 = - \bar{C}_1 m_1 - \bar{C}_3 m_2 - \bar{C}_4 m_3 \ .$$

Wir setzen diese Werte in 2, 4, 5 - 8 ein und schreiben :

$$a_1 = k_1 - k_2 \cdot m_1 \ .$$

$$a_2 = k_3 - k_2 \cdot m_2 \ .$$

$$a_3 = k_4 - k_2 \cdot m_3 \ .$$

Man erhält :

1.) $C_1 a_1 + C_3 a_2 + C_4 a_3 = 0$.

2.) $\bar{C}_1 a_1 + \bar{C}_3 a_2 + \bar{C}_4 a_3 = 0$.

3.) $C_1 (b_1^m - b_2^m \cdot m_1) + C_3 (b_3^m - b_2^m \cdot m_2) + C_4 (b_4^m - b_2^m \cdot m_3)$

$+ \bar{C}_1 (b_1^{\bar{m}} - b_2^{\bar{m}} \cdot m_1) + \bar{C}_3 (b_3^{\bar{m}} - b_2^{\bar{m}} \cdot m_2) + \bar{C}_4 (b_4^{\bar{m}} - b_2^{\bar{m}} \cdot m_3) =$

$- 1,0$.

$$4.)\ C_1 \cdot \mu (b_1^{m} + b_2^{m} \cdot m_1) + C_3 (b_3^{m} \cdot \mathfrak{b} + \mu \cdot m_2 \cdot b_2^{m})$$
$$+ C_4 \cdot (-b_4^{m} \cdot \mathfrak{b} + \mu \cdot m_3 \cdot b_2^{m})$$
$$- \bar{C}_1 \cdot \mu (b_1^{\bar{m}} + b_2^{\bar{m}} \cdot m_1) - \bar{C}_3 (b_3^{\bar{m}} \cdot \mathfrak{b} + \mu \cdot m_2 \cdot b_2^{\bar{m}})$$
$$- \bar{C}_4 \cdot (-b_4^{\bar{m}} \cdot \mathfrak{b} + \mu \cdot m_3 \cdot b_2^{\bar{m}}) = 0 .$$

$$5.)\ C_1 \cdot (b_1^{m-1} \cdot \mathfrak{v}_1' - b_2^{m-1} \cdot \mathfrak{v}_2' \cdot m_1)$$
$$+ C_3 \cdot (b_3^{m-1} \cdot \mathfrak{v}_3' - b_2^{m-1} \cdot \mathfrak{v}_2' \cdot m_2)$$
$$+ C_4 \cdot (b_4^{m-1} \cdot \mathfrak{v}_4' - b_2^{m-1} \cdot \mathfrak{v}_2' \cdot m_3)$$
$$- \bar{C}_1 \cdot (b_1^{\bar{m}-1} \cdot \mathfrak{v}_1' - b_2^{\bar{m}-1} \cdot \mathfrak{v}_2' \cdot m_1)$$
$$- \bar{C}_3 \cdot (b_3^{\bar{m}-1} \cdot \mathfrak{v}_3' - b_2^{\bar{m}-1} \cdot \mathfrak{v}_2' \cdot m_2)$$
$$- \bar{C}_4 \cdot (b_4^{\bar{m}-1} \cdot \mathfrak{v}_4 - b_2^{\bar{m}-1} \cdot \mathfrak{v}_2 \cdot m_3) = 0 .$$

$$6.)\ C_1 \cdot (b_1^{m-1} \cdot \mu_1 - b_2^{m-1} \cdot \mu_2 \cdot m_1)$$
$$+ C_3 \cdot (b_3^{m-1} \cdot \mu_3 - b_2^{m-1} \cdot \mu_2 \cdot m_2)$$
$$+ C_4 \cdot (b_4^{m-1} \cdot \mu_4 - b_2^{m-1} \cdot \mu_2 \cdot m_3)$$

$$+ \bar{C}_1 \cdot (b_1^{\bar{m}-1} \cdot \mu_1 - b_2^{\bar{m}-1} \cdot \mu_2 \cdot m_1)$$
$$+ \bar{C}_3 \cdot (b_3^{\bar{m}-1} \cdot \mu_3 - b_2^{\bar{m}-1} \cdot \mu_2 \cdot m_2)$$
$$+ \bar{C}_4 \cdot (b_4^{\bar{m}-1} \cdot \mu_4 - b_2^{\bar{m}-1} \cdot \mu_2 \cdot m_3) = 0.$$

Es folgt aus 1 :

$$C_4 = - C_1 \cdot \frac{a_1}{a_3} - C_3 \cdot \frac{a_2}{a_3} \cdot$$

Setzt man $\frac{a_1}{a_3} = d_1$, $\frac{a_2}{a_3} = d_2$, so folgt :

$$C_4 = - C_1 d_1 - C_3 d_2 \quad ; \qquad \text{ebenso}$$

$$\bar{C}_4 = - \bar{C}_1 d_1 - \bar{C}_3 d_2 \cdot$$

Diese Werte in 3 - 6 eingesetzt, ergeben, wenn man noch

$$(m_1 - m_3 \; d_1) = k'$$

$$(m_2 - m_3 \; d_2) = k'' \qquad \text{setzt,}$$

folgende Gleichungen :

1.) $C_1(b_1^{m} - b_2^{m} \cdot k' - d_1 \, b_4^{m}) + C_3(b_3^{m} - b_2^{m} \cdot k'' - d_2 \cdot b_4^{m})$

$+ \bar{C}_1(b_1^{\bar{m}} - b_2^{\bar{m}} \cdot k' - d_1 \, b_4^{\bar{m}}) + \bar{C}_3(b_3^{\bar{m}} - b_2^{\bar{m}} \cdot k'' - d_2 \cdot b_4^{\bar{m}}) = -1,0$

$$2.)\quad C_1 \cdot \left\{ a\,(b_1^{\,m} + b_2^{\,m} \cdot k') + b \cdot d_1 \cdot b_4^{\,m} \right\}$$
$$+ C_3 \cdot (b \cdot b_3^{\,m} + b_2^{\,m} \cdot a \cdot k'' + b \cdot d_2 \cdot b_4^{\,m})$$
$$- \bar{C}_1 \cdot \left\{ a\,(b_1^{\,\bar{m}} + b_2^{\,\bar{m}} \cdot k') + b \cdot d_1 \cdot b_4^{\,\bar{m}} \right\}$$
$$- \bar{C}_3 \cdot (b \cdot b_3^{\,\bar{m}} + b_2^{\,\bar{m}} \cdot a \cdot k'' + b \cdot d_2 \cdot b_4^{\,\bar{m}}) = 0 .$$

$$3.)\quad C_1 \cdot (\nu_1' \cdot b_1^{\,m-1} - \nu_2' \cdot b_2^{\,m-1} \cdot k' - \nu_4' \cdot d_1 \cdot b_4^{\,m-1})$$
$$+ C_3 \cdot (\nu_3' \cdot b_3^{\,m-1} - \nu_2' \cdot b_2^{\,m-1} \cdot k'' - \nu_4' \cdot d_2 \cdot b_4^{\,m-1})$$
$$- \bar{C}_1 \cdot (\nu_1' \cdot b_1^{\,\bar{m}-1} - \nu_2' \cdot b_2^{\,\bar{m}-1} \cdot k' - \nu_4' \cdot d_1 \cdot b_4^{\,\bar{m}-1})$$
$$- \bar{C}_3 \cdot (\nu_3' \cdot b_3^{\,\bar{m}-1} - \nu_2' \cdot b_2^{\,\bar{m}-1} \cdot k'' - \nu_4' \cdot d_2 \cdot b_4^{\,\bar{m}-1}) = 0 .$$

$$4.)\quad C_1 \cdot (\mu_1 \cdot b_1^{\,m-1} - \mu_2 \cdot b_2^{\,m-1} \cdot k' - \mu_4 \cdot d_1 \cdot b_4^{\,m-1})$$
$$+ C_3 \cdot (\mu_3 \cdot b_3^{\,m-1} - \mu_2 \cdot b_2^{\,m-1} \cdot k'' - \mu_4 \cdot d_2 \cdot b_4^{\,m-1})$$
$$+ \bar{C}_1 \cdot (\mu_1 \cdot b_1^{\,\bar{m}-1} - \mu_2 \cdot b_2^{\,\bar{m}-1} \cdot k' - \mu_4 \cdot d_1 \cdot b_4^{\,\bar{m}-1})$$
$$+ \bar{C}_3 \cdot (\mu_3 \cdot b_3^{\,\bar{m}-1} - \mu_2 \cdot b_2^{\,\bar{m}-1} \cdot k'' - \mu_4 \cdot d_2 \cdot b_4^{\,\bar{m}-1}) = 0 .$$

Diese 4 Gleichungen müssen nun für alle Laststellungen gelöst werden. Man kann dann Einflusslinien zeichnen für irgend eine Grösse des Trägers .

Steht die Lastgruppe über dem Anfangsriegel, so stehen nur 4 Gleichungen zur Bestimmung der Konstanten zur Verfügung. Diese genügen auch, denn wir haben lediglich mit den Werten Y_r bezw. Z_r zu rechnen. Die 4 Elastizitätsgleichungen sind folgende :

1.) $\left(\frac{\beta}{2} + 2\sin\alpha\right) \cdot Y_0 + \alpha Y_1 + \nu Z_0 - \gamma Z_1 = 0$.

2.) $\eta Y_0 + \mu Y_1 + \left(\frac{\chi}{2} - \sin\alpha \frac{J_d}{F_d}\right) Z_0 + \xi Z_1 = -\sin\alpha \frac{J_d}{F_d}$.

3.) $\left(\frac{\beta}{2} + 2\sin\alpha\right) \cdot Y_{12} + \alpha Y_{11} - \nu Z_{12} + \gamma Z_{11} = 0$.

4.) $\eta Y_{12} + \mu Y_{11} - \left(\frac{\chi}{2} - \sin\alpha \frac{J_d}{F_d}\right) Z_{12} - \xi Z_{11} = 0$.

Beachten wir die Ausführungen auf S.31, so lassen sich die Gleichungen schreiben :

1.) $C_1 K_1 + C_2 K_2 + C_3 K_3 + C_4 K_4 = 0$.

2.) $C_1 k_1 + C_2 k_2 + C_3 k_3 + C_4 k_4 = -\sin\alpha \frac{J_d}{F_d}$.

3.) $C_1 \left\{ b_1^{12} \cdot \left[\mu\left(\frac{\beta}{2} + 2\sin\alpha\right) - \nu\right] + b_1^{11} (\mu\alpha + \gamma) \right\}$

$+ C_2 \left\{ b_2^{12} \cdot \left[-\mu\left(\frac{\beta}{2} + 2\sin\alpha\right) - \nu\right] + b_2^{11} (-\mu\alpha + \gamma) \right\}$

$$+ C_3 \left\{ b_3^{12} \cdot \left[b\left(\frac{\beta}{2} + 2 \sin\alpha\right) - \gamma \right] + b_3^{11} (b\alpha + \gamma) \right\}$$

$$+ C_4 \left\{ b_4^{12} \cdot \left[-b\left(\frac{\beta}{2} + 2 \sin\alpha\right) - \gamma \right] + b_4^{11} (-b\alpha + \gamma) \right\} = 0.$$

4.)
$$C_1 \left\{ b_1^{12} \cdot \left[+a\eta - \left(\frac{\chi}{2} - \sin\alpha \frac{J_d}{F_d}\right) \right] + b_1^{11} (+a\mu - \xi) \right\}$$

$$+ C_2 \left\{ b_2^{12} \cdot \left[-a\eta - \left(\frac{\chi}{2} - \sin\alpha \frac{J_d}{F_d}\right) \right] + b_2^{11} (-a\mu - \xi) \right\}$$

$$+ C_3 \left\{ b_3^{12} \cdot \left[+b\eta - \left(\frac{\chi}{2} - \sin\alpha \frac{J_d}{F_d}\right) \right] + b_3^{11} (+b\mu - \xi) \right\}$$

$$+ C_4 \left\{ b_4^{12} \cdot \left[-b\eta - \left(\frac{\chi}{2} - \sin\alpha \frac{J_d}{F_d}\right) \right] + b_4^{11} (-b\mu - \xi) \right\} = 0.$$

Diese 4 Gleichungen sind zu lösen . Was die Ermittlung der statisch unbestimmten Kräfte anbetrifft, ist der erste Belastungsfall damit vollkommen erledigt .

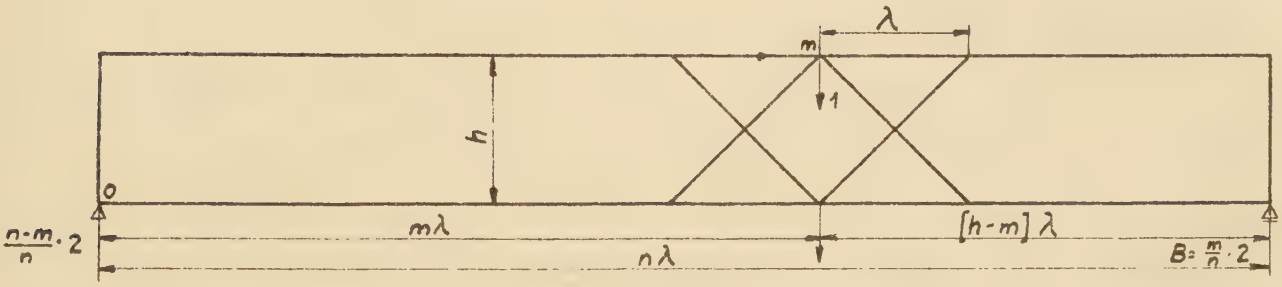
Einflusslinien und Verschiebepläne werden in der Zahlenrechnung besprochen, desgleichen der Ver - gleich dieser strengen Rechnung mit der Berechnung als Gelenkfachwerk .

---

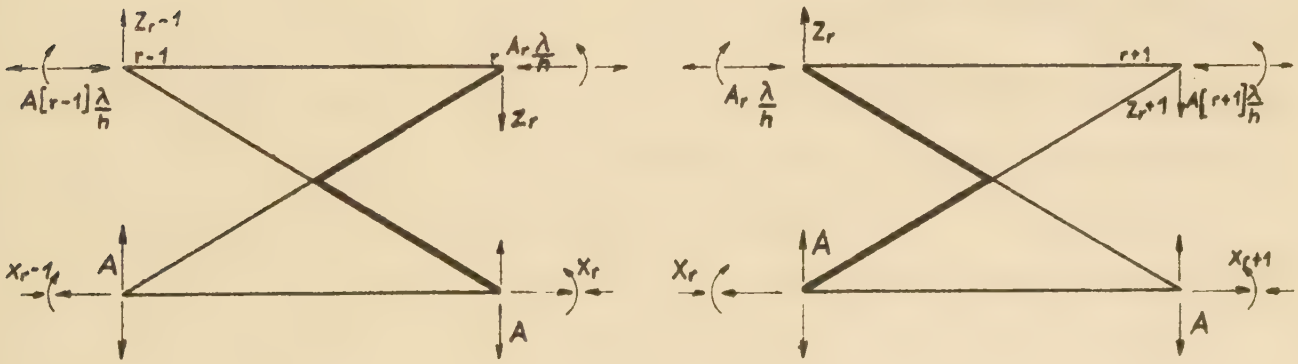
2. Teil.

Der 2. Belastungsfall - 2 antimetrische Lasten 1 - bedingt jetzt $Y = 0$. Es entstehen 2 Systeme einfacher Differenzengleichungen mit den Werten Z bezw. X.

Folgende Figur zeigt die Kräfte am Träger selbst.



Die Elastizitätsbedingungen stellen wir wieder an den beiden dem Punkte r benachbarten Halbrahmen auf. r liege links von m . Wir haben in der nächsten Figur die an den beiden dem Punkte r benachbarten Elementen auftretenden Kräfte eingetragen.



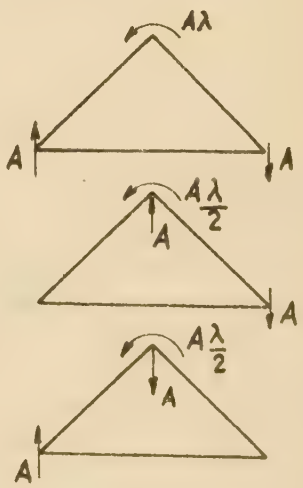
Wir müssen einmal fordern, dass sich der linke Halbrahmen um das gleiche Stück Δ öffnet wie der rechte. Wir erhalten:

$$1.)\quad \varphi \cdot Z_{r-1} + \chi \cdot Z_r + \varphi \cdot Z_{r+1} - (\varphi + \frac{\chi}{2}) \cdot A = 0.$$

Die homogene Gleichung ist ohne weiteres verständlich, wenn man sich an die Betrachtungen am ersten Belastungs - fall erinnert. Das Störungsglied $(\varphi + \frac{\chi}{2}) \cdot A$ ist folgendermassen gefunden :

Wir erhalten das Öffnen des linken Halbrahmens, wenn wir 2 nach aussen gerichtete Kräfte 1 angreifen lassen; diese stellen für den Halbrahmen eine symmetri - sche Belastung dar. Die Kräfte $A(r-1)\frac{\lambda}{h}$ - wir betrach- ten jetzt das Element r - und $A \cdot r \frac{\lambda}{h}$ sind als eine antimetrische Belastung anzusprechen, liefern also für das Öffnen keinen Beitrag. Wir haben also in dem Störungs- glied lediglich die Werte A und $A \cdot \lambda$ zu berücksichtigen. Das gleiche gilt für das Element $r + 1$.

Beachtet man noch die Möglichkeit, die Belastung durch A und $A\lambda$ zu zerle - gen in die Belastungen A und $A \cdot \frac{\lambda}{2}$ - siehe nebenstehende Figuren - so erkennt man, dass diese Zustände dem Zustand $Z_r = -1$ entsprechen, wenn man von der konstanten Grösse A absieht. Danach lässt sich dann das Glied $(\varphi + \frac{\chi}{2}) \cdot A$ sofort anschreiben .



Solche Gleichungen lassen sich an jeder Stelle des Trägers, abgesehen vom Anfangsglied und der Übergangsstelle aufstellen. Man wird zweckmässig auch hier von rechts aus mit den Gliedern $\bar{r}$ rechnen. - Vergleiche den ersten Belastungsfall - . Man erhält dann an beliebiger Stelle rechts von der Last die Gleichung :

$$2.)\ \varphi \cdot Z_{\bar{r}-1} + \chi \cdot Z_{\bar{r}} + \varphi \cdot Z_{\bar{r}+1} - (\varphi + \frac{\chi}{2}) \cdot B = 0.$$

Wie bereits erwähnt, lassen sich diese Gleichungen als ein System linearer Differenzengleichungen auffassen. Die allgemeine Lösung lautet :

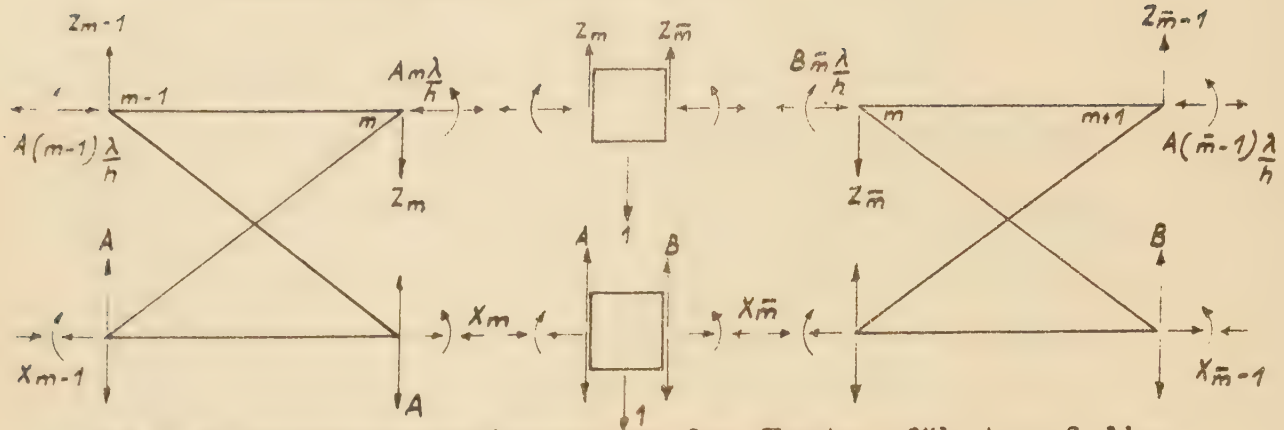
$$Z_r = 0{,}5\ A + C_1 \cdot c_1^{\,r} + C_2 \cdot c_2^{\,r} \quad .$$

$$Z_{\bar{r}} = 0{,}5\ B + \bar{C}_1 \cdot c_1^{\,r} + \bar{C}_2 \cdot c_2^{\,r} \quad .$$

Die Werte c_1 und c_2 sind die Wurzeln der quadratischen Gleichung :

$$c^2 \cdot \varphi + c \cdot \chi + \varphi = 0 \ .$$

Bestimmung der Konstanten.



Die Gleichgewichtsbedingung an den Knoten führt auf die Gleichung :

1.) $Z_m + Z_{\bar{m}} - 1 = 0$.

Wir setzen die entsprechenden Werte ein und erhalten :

1.) $C_1 \cdot c_1^{\,m} + C_2 \cdot c_2^{\,m} + \bar{C}_1 \cdot c_1^{\,\bar{m}} + \bar{C}_2 \cdot c_2^{\,\bar{m}} = 0$.

Die Bedingung, dass sich der Halbrahmen links ebensoviel öffnet wie der Halbrahmen rechts, führt auf die Gleichung:

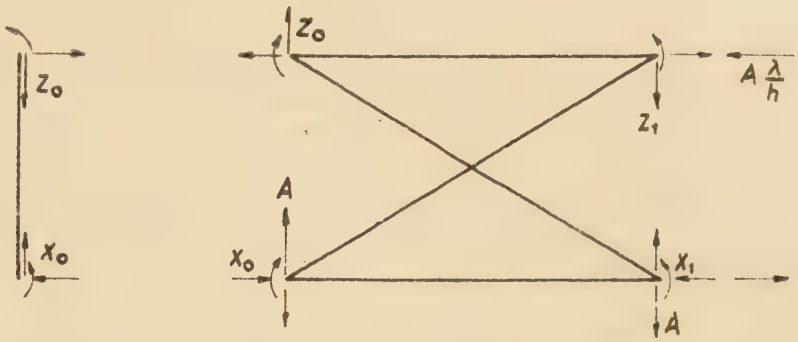
2.) $\varphi \cdot Z_{m-1} + \frac{\chi}{2}(Z_m - Z_{\bar{m}}) - \varphi Z_{\bar{m}-1} - (\varphi + \frac{\chi}{2}) \cdot \frac{1}{2} \cdot A + (\varphi + \frac{\chi}{2}) \cdot \frac{1}{2} B = 0$.

Wir setzen die entsprechenden Werte ein und erhalten :

2.) $C_1 \cdot c_1^{\,m-1}(\varphi + \frac{\chi}{2} \cdot c_1) + C_2 \cdot c_2^{\,m-1}(\varphi + \frac{\chi}{2} \cdot c_2)$

$- \bar{C}_1 \cdot c_1^{\,\bar{m}-1}(\varphi + \frac{\chi}{2} \cdot c_1) - \bar{C}_2 \cdot c_2^{\,\bar{m}-1}(\varphi + \frac{\chi}{2} \cdot c_2) = 0$.

Die 3. Gleichung erhalten wir aus der Elastizitäts-bedingung am Anfangsglied des Trägers :



Wir müssen die Verlängerung des Riegels der Öffnung des ersten Halbrahmens gleich setzen . Wir erhalten die Gleichung :

$$-Z_0 \cdot \frac{J_d}{F_d} \cdot h + \frac{\chi}{2} \cdot Z_0 + \varphi \cdot Z_1 - \left(\varphi + \frac{\chi}{2}\right) \cdot \frac{A}{2} = 0 .$$

Wir setzen die entsprechenden Werte ein und schreiben:

$$\alpha_1 = \left(\frac{\chi}{2} - h \cdot \frac{J_d}{F_d} + \varphi \cdot c_1 \right)$$

$$\alpha_2 = \left(\frac{\chi}{2} - H \cdot \frac{J_d}{F_d} + \varphi \cdot c_2 \right) .$$

Dann wird :

$$3.) \quad C_1 \cdot \alpha_1 + C_2 \cdot \alpha_2 = 0{,}5 \cdot h \cdot \frac{J_d}{F_d} \cdot A$$

Analog $$4.) \quad \bar{C}_1 \cdot \alpha_1 + \bar{C}_2 \cdot \alpha_2 = 0{,}5 \cdot h \cdot \frac{J_d}{F_d} \cdot B \quad .$$

Wir erhalten :

$$C_1 = 0{,}5 \cdot h \cdot \frac{J_d}{F_d} \cdot A \cdot \frac{1}{\alpha_1} - C_2 \cdot \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot$$

$$C_1 = 0{,}5 \cdot h \cdot \frac{J_d}{F_d} \cdot B \cdot \frac{1}{\alpha_1} - \bar{C}_2 \cdot \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot$$

Diese Werte setzen wir in die Gleichungen 1 und 2 ein und erhalten :

$$1.)\ C_2 \left(c_2^{\,m} - c_1^{\,m} \cdot \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) + \bar{C}_2 \left(c_2^{\,\bar{m}} - c_1^{\,\bar{m}} \cdot \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) =$$

$$-0{,}5\ h \cdot \frac{J_d}{F_d} \cdot \frac{1}{\alpha_1} \cdot \left(A \cdot c_1^{\,m} + B \cdot c_1^{\,\bar{m}}\right) \cdot$$

$$2.)\ C_2 \left\{ c_2^{\,m-1} \cdot \left(\zeta + \frac{\chi}{2} \cdot c_2\right) - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot c_1^{\,m-1} \left(\zeta + \frac{\chi}{2} \cdot c_1\right) \right\}$$

$$-\bar{C}_2 \left\{ c_2^{\,\bar{m}-1} \cdot \left(\zeta + \frac{\chi}{2} \cdot c_2\right) - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot c_1^{\,\bar{m}-1} \left(\zeta + \frac{\chi}{2} \cdot c_1\right) \right\} =$$

$$-0{,}5\ h \cdot \frac{J_d}{F_d} \cdot \frac{1}{\alpha_1} \cdot \left(\zeta + \frac{\chi}{2} \cdot c_1\right)\left(A \cdot c_1^{\,m-1} - B \cdot c_1^{\,\bar{m}-1}\right) \cdot$$

Diese Gleichungen müssen für jede Laststellung gelöst werden. Die Gleichungen geben an, dass die Koeffizienten C_1 ; C_2 ; $\bar{C}_1$ und $\bar{C}_2$ lediglich bedingt sind durch die elastischen Riegel am Ende und Anfang des Trägers. Werden diese Riegel starr angenommen, so erhalten wir für die Z-Werte $0{,}5\ A$. bezw. $0{,}5\ B$. .

Die statisch unbestimmten Grössen X ergeben ein weiteres System gewöhnlicher linearer Differenzen - gleichungen. Wir erhalten an der Stelle r bezw. $\bar{r}$:

$$\alpha \cdot X_{r-1} + \beta \cdot X_r + \alpha \cdot X_{r+1} = \gamma \cdot A \cdot r$$

$$\alpha \cdot X_{\bar{r}-1} + \beta \cdot X_{\bar{r}} + \alpha \cdot X_{\bar{r}+1} = \gamma \cdot B \cdot r \ .$$

Die Koeffizienten α, β und γ bestimmen sich in bekannter Weise zu :

$$\beta = \left(\int M^2 ds \cdot \frac{J_o}{J} + \int N^2 ds \cdot \frac{J_o}{F} + \int Q^2 ds \cdot K \cdot \frac{E}{G} \cdot \frac{J_o}{F}\right) X_r = -1 \cdot$$

Die Werte M , N und Q sind dem Zustand $X_r = -1$ entnommen. Wir setzen die Werte ein und erhalten:

$$\beta = 4 \left(\frac{s_3}{3} \cdot \frac{J_o}{J_3}\right)\left((M_1 + L_1)^2 + (M_1 + L_1) \cdot M_2 + M_2^2\right)$$

$$+ \frac{s_1}{3} \cdot \frac{J_o}{J_1}\left((M_2 + L_2)^2 + (M_2 + L_2) \cdot M_3 + M_3^2\right)$$

$$+ \frac{s_2}{3} \cdot \frac{J_o}{J_2}\left((M_3 + L_3)^2 + (M_3 + L_3) \cdot M_1 + M_1^2\right))$$

$$+ 4 \left(N_3^2 \cdot s_3 \cdot \frac{J_o}{F_3} + N_2^2 \cdot s_2 \cdot \frac{J_o}{F_2} + N_1^2 \cdot s_1 \cdot \frac{J_o}{F_1}\right)$$

$$+ 4 \cdot \frac{E}{G}\left(Q_3^2 \cdot s_3 \cdot K_3 \frac{J_o}{F_3} + Q_2^2 \cdot s_2 \cdot K_2 \frac{J_o}{F_2} + Q_1^2 \cdot s_1 \cdot K_1 \cdot \frac{J_o}{F_1}\right) \cdot$$

$$\alpha = \left(\int M \cdot \bar{M} \cdot ds \cdot \frac{J_o}{J} + \int N \cdot \bar{N} \cdot ds \cdot \frac{J_o}{F} + \int Q \cdot Q \cdot ds \cdot K \cdot \frac{E}{G} \cdot \frac{J_o}{F}\right)_{X_r = -1 \, , X_{r-1} = -1.}$$

Die Werte $\bar{M}$, $\bar{N}$ und $\bar{Q}$ sind dem Zustand $X_{r-1} = -1$ entnommen. Wir erhalten :

$$\alpha = 2\left(\frac{s_3}{6}\cdot\frac{J_c}{J_3}\left(M_2(M_1+L_1)+(M_2+M_1+L_1)(M_1+L_1+M_2)+M_2(M_1+L_1)\right)\right.$$

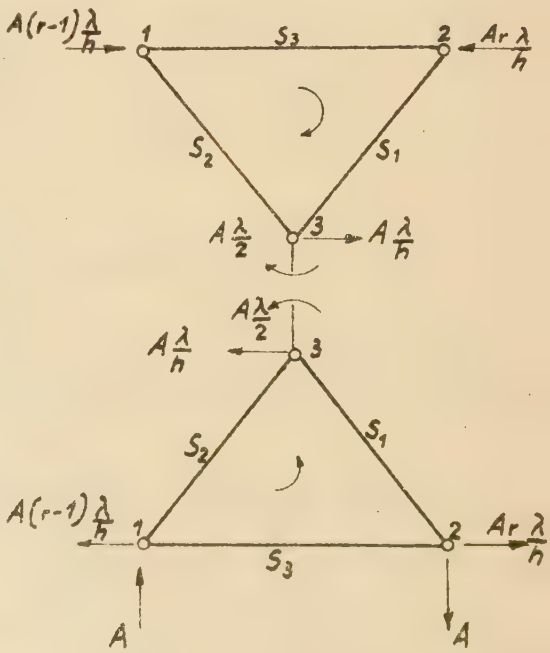
$$\left. + \frac{s_3}{3}\cdot\frac{J_c}{J_1}\left(M_3(M_3+L_3)+(M_3+L_3+M_1)(M_3+M_2+L_2)+M_1(M_2+L_2)\right)\right)$$

$$+2\left(N_3^2\cdot s_3\cdot\frac{J_c}{F_3} + N_1\cdot N_2\left(s_1\cdot\frac{J_c}{F_1} + s_2\cdot\frac{J_2}{F_2}\right)\right)$$

$$+2\cdot\frac{E}{G}\left(-Q_3^2\cdot K_3\cdot s_3\cdot\frac{J_c}{F_3} + Q_1\cdot Q_2\left(K_1\cdot s_1\cdot\frac{J_c}{F_1} + K_2\cdot s_2\cdot\frac{J_2}{F_2}\right)\right)$$

Das Störungsglied $\nu_{r,A}$ ist noch zu entwickeln.

Hierzu müssen die beiden nebenstehenden Belastungen des Dreiecks gerechnet werden. Wir erhalten für das obere Dreieck :



$N_{01} = 0$ $\qquad L_1 = 0$

$N_{02} = A\,\frac{\lambda}{h}\cdot\cos\alpha$ $\qquad L_2 = 0$

$N_{03} = -A\cdot r\cdot\frac{\lambda}{h}$ $\qquad L_3 = A\cdot\frac{\lambda}{2}$

Für das untere Dreieck wird :

$$N_{01} = + A \cdot \frac{1}{\sin \alpha_2} \qquad L_1 = 0$$

$$N_{02} = - A \cdot \sin \alpha_1 \qquad L_2 = 0$$

$$N_{03} = + A \cdot \frac{\lambda}{h} \; (r-1). \qquad L_3 = A \cdot \frac{\lambda}{2} .$$

Die weitere Durchrechnung hat zahlenmässig zu erfolgen. Wir erhalten dann alle gesuchten Grössen. Eine analoge Entwicklung gilt für das Element $r + 1$.
Aus dieser Belastung folgt für die beiden Felder r u. r+1 ein Kraftzustand, dem wir als Formänderungszustand den Zustand $X_r = -1$ zuordnen. Wir bilden für das Feld r und das Feld r+1 den Ausdruck :

$$\int M \cdot \bar{M} \cdot ds \cdot \frac{J_o}{J} + \int N \cdot \bar{N} \cdot ds \cdot \frac{J_o}{F} + \int Q \cdot \bar{Q} \cdot ds \cdot K \cdot \frac{E}{G} \cdot \frac{J_o}{F} ,$$

worin die Werte M, N und Q dem Zustand $X_r = -1$,

die Werte $\bar{M}$, $\bar{N}$ und $\bar{Q}$ dem obenbeschriebenen Kraftzustand entnommen sind .

Wir erhalten :

$$\text{Für das Feld } r : \quad + c_1 \cdot A + \frac{\gamma}{2} \cdot A \cdot r$$

$$\text{" " " } r+1 : \quad - c_1 \cdot A + \frac{\gamma}{2} \cdot A \cdot r \cdot$$

Die Summe beider Ausdrücke ist $= \gamma A \cdot r$. Damit ist das Störungsglied gefunden.

Die allgemeine Lösung der Differenzengleichungen lautet:

$$X_r = C_1 \cdot b_1^{\,r} + C_2 \cdot b_2^{\,r} + \frac{\gamma}{2\alpha+\beta} \cdot A \cdot r \quad .$$

$$X_{\bar{r}} = \bar{C}_1 \cdot b_1^{\,\bar{r}} + \bar{C}_2 \cdot b_2^{\,\bar{r}} + \frac{\gamma}{2\alpha+\beta} \cdot B \cdot r \quad .$$

worin b_1 und b_2 die Wurzeln der quadratischen Gleichung $\alpha + \beta \cdot b + \alpha \cdot b^2 = 0$ sind .

Die Konstanten bestimmen sich aus den Über - gangsbedingungen an der Laststelle, aus der Anfangs-und der Endbedingung . Die Last steht an der Stelle m, bezw. $\bar{m}$. Für diese Stelle gilt :

$$X_m = X_{\bar{m}} \quad .$$

Wir setzen $\frac{\gamma}{2\alpha+\beta} = K$, führen die entsprechenden Werte ein und erhalten :

$$1)\quad C_1 \cdot b_1^{\,m} + C_2 \cdot b_2^{\,m} - \bar{C}_1 \cdot b_1^{\,\bar{m}} - \bar{C}_2 \cdot b_2^{\,\bar{m}} + K(A \cdot m - B \cdot \bar{m}) = 0 \,.$$

Die Elastizitätsgleichung an dieser Stelle lautet :

$$\alpha \cdot X_{m-1} + \frac{\beta}{2}\,(X_m + X_{\bar{m}}) + \alpha X_{\bar{m}-1} = + c_1 \cdot A + \frac{\gamma}{2} \cdot Am + c_1 \cdot B + \frac{\gamma}{2} \cdot B \cdot \bar{m} \,.$$

Wir setzen die entsprechenden Werte ein und erhalten :

$$2)\quad C_1 \cdot b_1^{\,m-1}(\alpha + \frac{\beta}{2} \cdot b_1) + C_2 \cdot b_2^{\,m-1}(\alpha + \frac{\beta}{2} \cdot b_2) + \bar{C}_1 \cdot b_1^{\,\bar{m}-1}(\alpha + \frac{\beta}{2} \cdot b_1) + \bar{C}_2 \cdot b_2^{\,\bar{m}-1}(\alpha + \frac{\beta}{2} \cdot b_2) = 2 (c_1 + \alpha \cdot K) \,.$$

Beachtet man die Figur auf Seite 46 , so lässt sich auf Grund ähnlicher Betrachtungen die erste Elastizitäts - gleichung zwischen Riegel und erstem Element schreiben :

$$(\frac{h}{3} \cdot \frac{J_c}{J_d} + (\frac{2}{h})^2 \cdot K_d \cdot \frac{E}{G} \cdot \frac{J_c}{F_d} \cdot h + \frac{\beta}{2}) X_o + \alpha \cdot X_1 = c_1 A \,.$$

Wir setzen :

$$\mu = (\frac{h}{3} \cdot \frac{J_c}{J_d} + \frac{4}{h} \cdot K_d \cdot \frac{E}{G} \cdot \frac{J_c}{F_d} + \frac{\beta}{2}),$$ führen ein

$$X_o = C_1 + C_2$$

$$X_1 = C_1 \cdot b_1 + C_2 \cdot b_2 + K \cdot A$$ und erhalten :

3) $C_1\,(\mu+\alpha\cdot b_1) + C_2(\mu+\alpha\cdot b_2) = A(c_1 - \alpha\cdot K)$;

4) $\bar{C}_1\,(\mu+\alpha\cdot b_1) + \bar{C}_2(\mu+\alpha\cdot b_2) = B(c_1 - \alpha\cdot K)$.

Wir schreiben :

$$C_2 = A\cdot\frac{c_1-\alpha\cdot K}{\mu+\alpha\cdot b_2} - C_1\,\frac{\mu+\alpha\cdot b_1}{\mu+\alpha\cdot b_2} = A\cdot m_1 - C_1\cdot m_2 .$$

Ebenso : $$\bar{C}_2 = B\cdot m_1 - \bar{C}_1\cdot m_2 .$$

Diese Werte setzen wir in die Gleichungen 1 und 2 ein.

Wir erhalten :

1) $C_1\,(b_1^{m} - m_2\cdot b_2^{m}) - \bar{C}_1(b_1^{\bar{m}} - b_2^{\bar{m}}\cdot m_2)$

$$+ A\,(K\cdot m + b_2^{m}\cdot m_1) - B(K\cdot\bar{m} + b_2^{\bar{m}}\cdot m_1) = 0$$

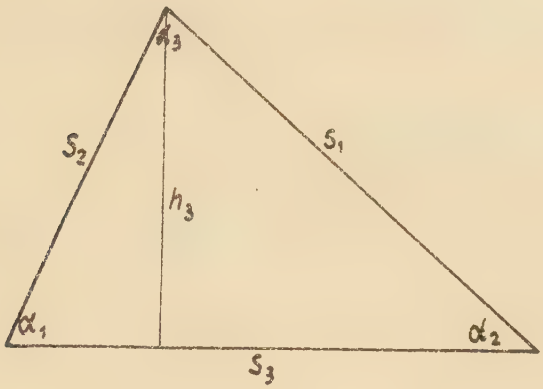
2) $C_1\,(b_1^{m-1}(\alpha+\tfrac{\beta}{2}\cdot b_1) - b_2^{m-1}(\alpha+\tfrac{\beta}{2}\cdot b_2)\cdot m_2)$

$$+ \bar{C}_1\,(b_1^{\bar{m}-1}(\alpha+\tfrac{\beta}{2}\cdot b_1) - b_2^{\bar{m}-1}(\alpha+\tfrac{\beta}{2}\cdot b_2)\cdot m_2) =$$

$$2(c_1+\alpha\cdot K) - m_1\,(\alpha+\tfrac{\beta}{2}\cdot b_2)(A\cdot b_2^{m-1} + B\cdot b_2^{\bar{m}-1}) .$$

Diese beiden Gleichungen sind wiederum massgebend für alle Laststellungen zwischen 1 und $\bar{1}$. Treten die Lasten über den Anfangs- oder Endriegel, dann haben wir wieder den Belastungsfall 1 vor uns, der bereits in dem ersten Teil erledigt worden ist. Damit ist eine vollständige Berechnung des Rautenträgers für diese beiden Belastungsarten durchgeführt. Wir können dann durch Überlagerung beider Belastungsarten auch den Einfluss einer über den Ober- oder Untergurt wandernden Einzellast auf irgend eine Grösse des Trägers angeben.

Zahlenbeispiel.



$s_3 = 9{,}0$ m. $\qquad h_3 = 5{,}25$ m.

$s_2 = s_1 = \sqrt{5{,}25^2 + 4{,}5^2} = 6{,}9147$ m .

$J_c = 488\ 000$. cm^4 . $\qquad J_d = 122\ 000\ cm^4$.

$F_1 = F_2 = F_3 = F = 488\ cm^2$

$$\operatorname{ctg}\alpha_1 = \operatorname{ctg}\alpha_2 = \frac{4{,}5}{5{,}25} = + 0{,}8571 .$$

$$\operatorname{ctg}\alpha_3 = - \operatorname{ctg}(\alpha_1 + \alpha_2) = + 0{,}1548 .$$

$$F = s_3 . \frac{h_3}{2} = 4{,}5 . 5{,}25 = 23{,}625\ m^2 .$$

Da F = konstant, erhält man :

$$a_1 = 6 . \frac{J_c}{F} \left[(\sum s) . \frac{\operatorname{ctg}\alpha_1}{2F} - \frac{1}{s_1} \right]$$

$$\sum s = 22{,}829.\ m .$$

$$\frac{J_c}{F} = 0,1$$

$$s_1 = 6 \cdot 0,1 \left[22,829 \cdot \frac{0,8571}{2 \cdot 23,625} - \frac{1}{6,9147} \right]$$

$$s_1 = s_2 = 0,1617 \text{ m} .$$

$$s_3 = 6 \cdot \frac{J_c}{F} \left[(\sum s) \frac{\operatorname{ctg} \alpha_3}{2F^+} - \frac{1}{s_3} \right] =$$

$$6 \cdot 0,1 \left[22,829 \cdot \frac{0,1548}{2 \cdot 23,625} - \frac{1}{9,0} \right] = \underline{- 0,0218}$$

$$l_1 = l_2 = s_1 \cdot \frac{J_c}{J_1} = 6,9147 \cdot 4 = 27,659 \text{ m} .$$

$$l_3 = s_3 \cdot \frac{J_c}{J_3} = \underline{9,0 \text{ m}} .$$

$$\nu_2 = \nu_1 = 6 K \cdot \frac{E}{G} \cdot \frac{J_1}{F_1 \cdot s_1^2} =$$

$$6 \cdot 1,7 \cdot 2,75 \cdot \frac{0,025}{47,812\,5} = \underline{0,01467} .$$

$$\nu_3 = 6 \cdot 1,7 \cdot 2,75 \cdot \frac{0,1}{81} = \underline{0,03463} .$$

$$\alpha_1 = l_1 (1 - \nu_1) - s_1 =$$

$$27,659 (1 - 0,01467) - 0,1617 =$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 27,091 \text{ m} .$$

$$\alpha_3 = l_3 (1 - \nu_3) - s_3 =$$

$$9,0 (1 - 0,03463) + 0,0218 =$$

$$\alpha_3 = 8,710 \text{ m} .$$

$$\beta_1 = \beta_2 = 2 \cdot l_3 \left(1+\tfrac{1}{2}\gamma_3 \right) + 2 \cdot l_2 \left(1+\tfrac{1}{2}\gamma_2 \right) + a_2 + a_3 =$$

$$2 \cdot 9,0 (1 + 0,0173)$$

$$+ 2 \cdot 27,659 \; (1 + 0,0073) + 0,1617 - 0,0218 =$$

$$\underline{\beta_1 = \beta_2 = 74,175 \text{ m} .}$$

$$\beta_3 = 2 \cdot l_2 \cdot \left(1+\tfrac{1}{2}\gamma_2\right) + 2 \cdot l_1 \left(1+\tfrac{1}{2}\gamma_1 \right) + a_1 + a_2 =$$

$$4 \cdot 27,659 \; (1+0,0073) + 2 \cdot 0,1617 = \underline{\beta_3 = 111,769 .}$$

Setzen wir die Werte α ..... und β ..... ein in das Gleichungssystem :

$$M_1 \cdot \beta + M_2 \cdot \alpha_3 + M_3 \cdot \alpha = C_1$$

$$M_1 \cdot \alpha_3 + M_2 \cdot \beta + M_3 \cdot \alpha = C_2$$

$$M_1 \cdot \alpha + M_2 \cdot \alpha + M_3 \cdot \beta_3 = C_3$$

---

so erhalten wir :

$$M_1 = + 0,01481 \cdot C_1 - 0,000\,469 \cdot C_2 - 0,003\,475 \cdot C_3$$

$$M_2 = - 0,000\,469 \cdot C_1 + 0,01481 \cdot C_2 - 0,003\,475 \cdot C_3 .$$

$$M_3 = - 0,003\,475 \cdot C_1 - 0,003\,475 \cdot C_2 + 0,01063 \cdot C_3$$

Die Werte C_1, C_2 und C_3 sind nunmehr für jeden Belastungsfall zu errechnen.

$$\sin \alpha_2 = \frac{10,5}{\sqrt{9,0^2 + 10,5^2}} = 0,7593$$

$$\cos \alpha_2 = \frac{9,0}{\sqrt{191,25}} = 0,6508.$$

1.) Zustand $\underline{Z_r = -1}$.

$$\underline{N_{01}} = \frac{1}{\sin \alpha_2} = \frac{1}{0,7593} = 1,317 \text{ t} .$$

$$\underline{N_{02}} = \operatorname{ctg} \alpha_2 \cdot \cos \alpha_1 = 0,8571 \cdot 0,6508 = \underline{0,558 \text{ t}}.$$

$$\underline{N_{03}} = - \operatorname{ctg} \alpha_2 = \underline{- 0,857 \text{ t}}$$

$$L_1 = 0 \; ; \quad L_2 = 0 \; ; \quad L_3 = \frac{\lambda}{2} = 4,5 \text{ tm} .$$

$$C_1 = - (2 \; L_1 \cdot l_3 (1 + \tfrac{1}{2} \nu_3) + L_3 \cdot l_2 (1 - \nu_2))$$

$$+ 6 \; \frac{J_c}{F} ((N_1 - N_3) \operatorname{ctg} \alpha_2 + (N_1 - N_2) \operatorname{ctg} \alpha_3)_0 .$$

$$= - 4,5 \cdot 2 \; 7,659(1 - 0,01467)$$

$$+ 6.01 \; ((1,317+0,857) \cdot 0,8571+(1,317-0,558) \cdot 0,1548)=$$

$$\underline{C_1 = - 121,450 \text{ tm}^2} .$$

$$C_2 = - (2 \; L_2 \cdot l_1 (1 + \tfrac{1}{2} \nu_1) + L_1 \cdot l_3 (1 - \nu_3))$$

$$+ 6 \; \frac{J_c}{F} ((N_2 - N_1) \operatorname{ctg} \alpha_3 + (N_2 - N_3) \operatorname{ctg} \alpha_1)_0 .$$

$$= 6.01 \; ((0,558-1,317) \cdot 0,1548+(558+0,857) \cdot 0,857) =$$

$$\underline{C_2 = + 0,657 \text{ tm}^2} .$$

$$C_3 = - (2 \cdot L_3 \cdot l_2 (1 + \tfrac{1}{2} \nu_2) + L_2 \cdot l_1 (1 - \nu_1))$$

$$+ 6 \; \frac{J_c}{F} ((N_3 - N_2) \operatorname{ctg} \alpha_1 + (N_3 - N_1) \operatorname{ctg} \alpha_2) =$$

$$= -2 \cdot 4,5 \cdot 27,659(1 + 0,00733)$$

$$+ 6 \cdot 0,1((-0,857-0,558) \cdot 0,8571+(-0,857-1,317) \cdot 0,8571)=$$

$$\underline{C_3 = - 252,599 \text{ tm}^2} .$$

Mit diesen Werten folgt :

$$M_1 = - 0{,}9207 \text{ tm}$$

$$M_2 = + 0{,}9445 \text{ tm}$$

$$M_3 = - 2{,}2658 \text{ tm} .$$

Zustand $Y_r = - 1$

$$N_{03} = \frac{1}{h_3} = \frac{1}{5{,}25} = 0{,}190 \text{ t} .$$

$$N_{02} = - \frac{1}{h_3} \cos \alpha_2 = - 0{,}190 \cdot 0{,}6508 =$$

$$N_{02} = N_{01} = - 0{,}124 \text{ t} .$$

$$L_1 = 0 ; \quad L_2 = + 1 \text{ tm} ; \quad L_3 = - 1 \text{ tm}.$$

Nach den bereits auf S. 59 und 60 angewandten Formeln erhält man :

$$C_1 = +1 \cdot 27{,}659 \ (1-0{,}01467) + 6 \cdot 0{,}1((-0{,}124-0{,}190) \cdot 0{,}8571)$$

$$C_1 = 27{,}091 \text{ tm}^2 .$$

$$C_2 = -2 \cdot 1 \cdot 27{,}659(1+0{,}007) + 6 \cdot 0{,}1((-0{,}124-0{,}190) \cdot 0{,}857)$$

$$C_2 = - 55{,}884 \text{ tm}^2 .$$

$$C_3 = +2 \cdot 1 \cdot 27{,}659(1+0{,}007333) - 1 \cdot 27{,}659(1-0{,}01467)$$
$$+6 \cdot 0{,}1 \cdot 2((0{,}190 + 0{,}124) \cdot 0{,}8571)$$

$$C_3 = 28{,}793 \text{ tm}^2 .$$

Mit diesen Werten folgt :

$$M_1 = + 0{,}3273 \text{ tm}$$
$$M_2 = - 0{,}9402 \text{ tm}$$
$$M_3 = + 0{,}4062 \text{ tm} .$$

Zustand $X_r = - 1$.

$$N_{01} = \frac{\cos\alpha_1}{h_3} = + 0{,}124 \text{ t}$$
$$N_{02} = N_{03} = 0 .$$
$$L_1 = 0 ; \quad L_2 = - 1 \text{ tm} ; \quad L_3 = 0 .$$

In gleicher Weise erhält man hier :

$$c_1 = + 6 . 0{,}1 (0{,}124 . 0{,}8571 + 0{,}124 . 0{,}1548) =$$
$$\underline{c_1 = 0{,}0753 \text{ tm}^2} .$$

$$c_2 = + 2 . 1 . 27{,}659 . (1 + 0{,}00733) + 6 . 0{,}1 (- 0{,}124 . 0{,}1548) =$$
$$\underline{c_2 = + 55{,}711 \text{ tm}^2} .$$

$$c_3 = + 1 . 27{,}659 (1 - 0{,}01467) + 6 . 0{,}1 (- 0{,}124 . 0{,}857) =$$
$$\underline{c_3 = + 27{,}189 \text{ t m}^2} .$$

Mit diesen Werten erhalten wir :

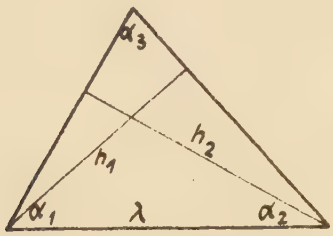
$$M_1 = - 0{,}1195 \text{ tm}$$
$$M_2 = + 0{,}7303 \text{ tm}$$
$$M_3 = + 0{,}0952 \text{ tm}$$

Nach S. 9 war :

$$N_1 = N_{01} - \frac{M_1}{h_1} + \frac{M_2}{h_2} \cdot \cos\alpha_3 + \frac{M_3}{h_3} \cdot \cos\alpha_2 \,.$$

$$N_2 = N_{02} - \frac{M_2}{h_2} + \frac{M_3}{h_3} \cdot \cos\alpha_1 + \frac{M_1}{h_1} \cdot \cos\alpha_3 \,.$$

$$N_3 = N_{03} - \frac{M_3}{h_3} + \frac{M_1}{h_1} \cdot \cos\alpha_2 + \frac{M_2}{h_2} \cdot \cos\alpha_1 \,.$$



Es ist : $\lambda \cdot \sin\alpha = h_1 = h_2 =$

$9{,}0 \cdot 0{,}7593 = 6{,}8333$

$\cos\alpha_3 = -\cos 2\alpha = +0{,}1529$.

Man erhält also für den Zustand $\underline{Z_r = -1}$:

$$N_1 = +1{,}317 + \frac{0{,}9207}{6{,}8333}$$

$$+ \frac{0{,}9445}{6{,}8333} \cdot 0{,}1529 - \frac{2{,}2658}{5{,}25} \cdot 0{,}6508 =$$

$$\underline{N_1 = +1{,}192 \text{ t}} \,.$$

$$N_2 = +0{,}558 - \frac{0{,}9445}{6{,}8333}$$

$$- \frac{2{,}2658}{5{,}25} \cdot 0{,}6508 - \frac{0{,}9207}{6{,}8333} \cdot 0{,}1529 =$$

$$\underline{N_2 = +0{,}118 \text{ t}} \,.$$

$$N_3 = - 0,857 + \frac{2,2658}{5,25}$$

$$- \frac{0,9207}{6,8333} \cdot 0,6508 + \frac{0,9445}{6,8333} \cdot 0,6508 =$$

$$\underline{N_3 = - 0,423 \ t .}$$

In gleicher Weise für den Zustand $Y_r = - 1$ angesetzt, erhält man :

$$\underline{N_1 = - 0,148 \ t .}$$

$$N_1 = - 0,124 - \frac{0,3273}{6,8333}$$

$$- \frac{0,9402}{6,8333} \cdot 0,1529 + \frac{0,4062}{5,25} \cdot 0,650$$

$$N_2 = - 0,124 + \frac{0,9402}{6,8333}$$

$$+ \frac{0,4062}{5,25} \cdot 0,6508 + \frac{0,3273}{6,8333} \cdot 0,1529 =$$

$$\underline{N_2 = + 0,071 \ t .}$$

$$N_3 = + 0,190 - \frac{0,4062}{5,25}$$

$$+ \frac{0,3273}{6,833} \cdot 0,6508 - \frac{0,9402}{6,8333} \cdot 0,6508 =$$

$$\underline{N_3 = + 0,055 \ t .}$$

Wir erhalten in gleicher Weise für den Zustand $X_r = -1$:

$$N_1 = + 0{,}124 + \frac{0{,}1195}{6{,}8333}$$

$$+ \frac{0{,}7303}{6{,}8333} \cdot 0{,}1529 + \frac{0{,}0952}{5{,}25} \cdot 0{,}6508 =$$

$$\underline{N_1 = + 0{,}170 \text{ t}} .$$

$$N_2 = - \frac{0{,}7303}{6{,}8333} + \frac{0{,}0952}{5{,}25} \cdot 0{,}6508$$

$$- \frac{0{,}1195}{6{,}8333} \cdot 0{,}1529 =$$

$$\underline{N_2 = - 0{,}098 \text{ t}.}$$

$$N_3 = - \frac{0{,}0952}{5{,}25} - \frac{0{,}1195}{6{,}8333} \cdot 0{,}6508$$

$$+ \frac{0{,}7303}{6{,}8333} \cdot 0{,}6508 =$$

$$\underline{N_3 = + 0{,}040 \text{ t}}.$$

Die Querkräfte bestimmen sich zu :

1.) <u>für $Z_r = - 1$</u> .

$$\underline{Q_1} = \frac{M_3 - M_2 - L_2}{s_1} = - \frac{2{,}2658 + 0{,}9445}{6{,}9147} = \underline{- 0{,}464 \text{ t}.}$$

$$\underline{Q_2} = \frac{M_3 + L_3 - M_1}{s_2} = - \frac{2{,}2658 - 4{,}5 - 0{,}9207}{6{,}9147} = \underline{+ 0{,}456 \text{ t}.}$$

$$\underline{Q_3} = \frac{M_2 - M_1 - L_1}{s_3} = + \frac{0{,}9445 + 0{,}9207}{9{,}0} = \underline{+ 0{,}207 \text{ t}.}$$

2.) für $X_r = -1$.

$$Q_1 = \frac{0,4062 + 0,9402 - 1,0}{6,9147} = + 0,050 \text{ t}.$$

$$Q_2 = \frac{0,4062 - 1,0 - 0,3273}{6,9147} = - 0,133 \text{ t}.$$

$$Q_3 = \frac{-0,9402 - 0,3273}{9,0} = - 0,141 \text{ t}.$$

3.) für $X_r = - 1$.

$$Q_1 = \frac{0,0952 - 0,7303 + 1,0}{6,9147} = + 0,053 \text{ t}.$$

$$Q_2 = \frac{0,0952 + 0,1195}{6,9147} = + 0,031 \text{ t}.$$

$$Q_3 = \frac{0,7303 + 0,1195}{9,0} = + 0,094 \text{ t}.$$

Jetzt können wir die allgemeinen Koeffizienten der Elastizitätsgleichungen ermitteln :

$$\underline{\alpha} = (M_1 + M_3 + L_3)_y =$$

$$(0,3273 + 0,4062 - 1,0) = \underline{- 0,2665} .$$

$$\underline{\beta} = 2(M_3 + M_2 + L_2)_y =$$

$$2(0,4062 - 0,9402 + 1,0) = \underline{+ 0,9319} .$$

$$\underline{\gamma} = -(M_1 + M_3 + L_3)_z =$$

$$-(-0,9207 - 2,2658 + 4,5) = \underline{-1,3135} .$$

$$\underline{\mu} = - \left[\frac{M}{6} - (M_1 + 2(M_3 + L_3)) - N_2 \sin\alpha \frac{J_d}{F_d} + Q_2 \cos\alpha K_d \frac{E}{G} \cdot \frac{J_d}{F_d} \right]_y =$$

- Es sei noch vorweggenommen :

$$\sin\alpha \cdot \frac{J_d}{F_d} = 0,7593 \cdot 0,025 = 0,019 .$$

$$\cos\alpha K_d \cdot \frac{E}{G} \cdot \frac{J_d}{F_d} = 0,6508 \cdot 1,7 \cdot 2,75 \cdot 0,025 = 0,076 .$$

$$- \frac{4,5}{6} (0,3273 + 2 (0,4062 - 1,0)) - 0,071 \cdot 0,019$$

$$-0,133 \cdot 0,076 = \underline{+ 0,6568} .$$

$$\underline{\varphi} = \left(- \frac{M}{6} - (M_1 + 2(M_3 + L_3)) + N_2 \sin\alpha \frac{J_d}{F_d} - Q_2 \cos\alpha K_d \frac{E}{G} \frac{J_d}{F_d} \right)_z =$$

$$\left(- \frac{4,5}{6} (- 0,9207 + 2 (- 2,2658 + 4,5)) \right.$$

$$\left. + 0,118 \cdot 0,019 - 0,456 \cdot 0,076 \right) = \underline{- 2,6933} .$$

$$\underline{\chi} = 2\left(-\frac{M}{6}(M_2+2M_3) - N_1 \sin\alpha \cdot \frac{J_d}{F_d} + Q_1 \cos\alpha \cdot K_d \cdot \frac{E}{G} \cdot \frac{J_d}{F_d}\right)_z =$$

$$= 2\left(-\frac{4,5}{6}(+ 0,9445 - 2 \cdot 2,2658)\right.$$

$$\left. - 1,192 \cdot 0,019 - 0,464 \cdot 0,076\right) = \underline{- 5,4964} \,.$$

$$\gamma = -(M_2 + M_3)_z = + 1,3213 \,.$$

$$\underline{\eta} = \left(\frac{M}{6}(M_2+L_2+2M_3) + \sin\alpha \cdot \frac{J_d}{F_d} \cdot N_1 - \cos\alpha \cdot K_d \cdot \frac{E}{G} \cdot \frac{J_d}{F_d} \cdot Q_1\right)_y =$$

$$- \frac{4,5}{6}\,(- 0,9402 + 1,0 + 2 \cdot 0,4062)$$

$$+ 0,019 - 0,143 - 0,076 \cdot 0,050 = \underline{- 0,6606} \,.$$

Mit diesen Werten sind jetzt die 4 Wurzeln der reziproken Gleichung ermittelt worden :

$$b_1 = - 4,6053$$

$$b_2 = - 0,2171$$

$$b_3 = - 1,8548$$

$$b_4 = - 0,5392 \,.$$

Nach Seite 28 ist :

$$\alpha = - \frac{\gamma\,(1-b_1^{\,2})}{\alpha\,(1+b_1^{\,2}) + \beta \cdot b_1} =$$

$$- \frac{- 1,3135\,(1 - 4,6053^{\,2})}{-0,2665\,(1 + 4,6052^2) - 0,9319 \cdot 4,6053}$$

$$= + 2,5995 \,.$$

$$b = -\frac{\gamma\,(1-b_3^{\,2})}{\alpha\,(1+b_3^{\,2}) + \beta\,.\,b_3} =$$

$$-\frac{-1{,}3135\,(1-1{,}8548^2)}{-0{,}2665\,(1+1{,}8548^2)-0{,}9319\,.\,1{,}8548} = \underline{+\,1{,}1007}.$$

Nach S. 31 müssen wir schreiben :

$$K_1 = (a\,(\frac{\beta}{2} + 2\sin\alpha) + \gamma + b_1\,(a.\alpha - y)) =$$

$$+\,2{,}5995\,(\,0{,}4660 + 2.0{,}7593\,) + 1{,}3213$$

$$-\,4{,}6053\,(\,2{,}5995 - 0{,}2665 + 1{,}3135\,) = \underline{K_1 = +\,3{,}6217}.$$

$$K_2 = (-a(\frac{\beta}{2} + 2\sin\alpha) + \gamma - b_2\,(a.\alpha + y)) =$$

$$-\,2{,}5995\,(\,0{,}4660 + 2.07593\,) + 1{,}3213$$

$$+\,0{,}2171\,(\,2{,}5995\,.\,-\,0{,}2665 - 1{,}3135) = \underline{K_2 = -\,4{,}2731}.$$

$$K_3 = (b\,(\frac{\beta}{2} + 2\sin\alpha) + \gamma + b_3\,(b.\alpha - y)) =$$

$$1{,}1007\,.\,1{,}9845 + 1{,}3213$$

$$-1{,}8548\,(\,1{,}1007 - 0{,}2665 + 1{,}3135) = \underline{K_3 = +\,1{,}6134}.$$

$$K_4 = (-b(\frac{\beta}{2} + 2\sin\alpha) + \gamma - b_4\,(b.\alpha + y)) =$$

$$-\,1{,}1007\,.\,1{,}9845 + 1{,}3213$$

$$+0{,}5392(-1{,}1007\,.\,0{,}2665 - 1{,}3135) = \underline{K_4 = -\,1{,}7294}.$$

Wir ermitteln weiterhin :

$$(\frac{\chi}{2} - \sin\alpha\,\frac{J_d}{F_d}) = (-\,2{,}7482 - 0{,}019) = -\,2{,}7672\,.$$

$$k_1 = (a\eta + (\frac{\chi}{2} - \sin\alpha \cdot \frac{J_d}{F_d}) + b_1(\mu a + \varphi)) =$$

$+ 2,5995 \cdot - 0,6606 - 2,7672$

$- 4,6053(0,6568 \cdot 2,5995 - 2,6933) = \underline{k_1 = + 0,0564}$.

$$k_2 = (-\mu\eta + (\frac{\chi}{2} - \sin\alpha \cdot \frac{J_d}{F_d}) + b_2(-\mu a + \varphi)) =$$

$+ 2,5995 \cdot 0,6606 - 2,7672$

$- 0,2171 (-0,6568 \cdot 2,5995 - 2,6933) = \underline{k_2 = - 0,0943}$.

$$k_3 = (b \cdot \eta + (\frac{\chi}{2} - \sin\alpha \cdot \frac{J_d}{F_d}) + b_3(\mu b + \varphi)) =$$

$1,1007 \cdot - 0,6606 - 2,7672$

$- 1,8548 (0,6568 \cdot 1,1007 - 2,6933) = \underline{k_3 = + 0,1603}$.

$$k_4 = (-b\eta + (\frac{\chi}{2} - \sin\alpha \cdot \frac{J_d}{F_d}) + b_4 (-\mu b + \varphi)) =$$

$1,1007 \cdot 0,6606 - 2,7672$

$- 0,5392 (-0,6568 \cdot 1,1007 - 2,6933) = \underline{k_4 = - 0,1982}$.

Nach Seite 34 wurde eingesetzt :

$$\nu'_1 = (-\mu a + \varphi) + \frac{\chi}{2} \cdot b_1 =$$

$\underline{\nu'_1} = - 0,6568 \cdot 2,5995 - 2,6933$

$+ 2,7482 \cdot 4,6053 = \underline{+ 8,2558}$.

$$\nu'_2 = (+\mu a + \varphi) + \frac{\chi}{2} \cdot b_2 =$$

$\underline{\nu_2} = + 0,6568 \cdot 2,5995 - 2,6933$

$+ 2,7482 \cdot 0,2171 = \underline{- 0,3893}$.

$$v'_3 = (-\mu b + \varphi) + \frac{\chi}{2} \cdot b_3 \quad =$$

$\underline{v'_3} = -0{,}6568 \cdot 1{,}1007 - 2{,}6933$

$+ 2{,}7482 \cdot 1{,}8548 = \underline{+ 1{,}6811}$.

$$v'_4 = (+\mu b + \varphi) + \frac{\chi}{2} \cdot b_4 \quad =$$

$\underline{v_4} = + 0{,}6568 \cdot 1{,}1007 - 2{,}6933$

$+ 2{,}7482 \cdot 0{,}5392 = \underline{- 0{,}4887}$.

Ferner war :

$$\mu_1 = a \cdot (\alpha + \frac{\beta}{2} \cdot b_1) + \gamma - v \cdot b_1 =$$

$2{,}5995\ (-0{,}2665 + 0{,}4660 \cdot - 4{,}6053)$

$- 1{,}3135 + 1{,}3213 \cdot 4{,}6053 = \underline{\mu_1 = - 1{,}500}$.

$$\mu_2 = -a \cdot (\alpha + \frac{\beta}{2} \cdot b_2) + \gamma - v \cdot b_2 =$$

$- 2{,}5995\ (-0{,}2665 + 0{,}4660 \cdot - 0{,}2171) +$

$(-1{,}3135 + 1{,}3213 \cdot 0{,}2171) = \underline{\mu_2 = - 0{,}0707}$.

$$\mu_3 = b \cdot (\alpha + \frac{\beta}{2} \cdot b_3) + \gamma - v \cdot b_3 =$$

$1{,}1007\ (-0{,}2665 + 0{,}4660 \cdot - 1{,}8548)$

$- 1{,}3135 + 1{,}3213 \cdot 1{,}8548 = \underline{\mu_3 = - 0{,}1075}$.

$$\mu_4 = -b \cdot (\alpha + \frac{\beta}{2} \cdot b_4) + \gamma - v \cdot b_4 =$$

$-1{,}1007\ (-0{,}2665 + 0{,}4660 \cdot - 0{,}5392)$

$-1{,}3135 + 1{,}3213 \cdot 0{,}5392 = \underline{\mu_4 = - 0{,}0313}$.

Wir erhalten weiterhin :

$$\underline{m_1} = \frac{K_1}{K_2} = \frac{+\ 3{,}6217}{-\ 4{,}2731} = \underline{-\ 0{,}8476}\ .$$

$$\underline{m_2} = \frac{K_3}{K_2} = \frac{+\ 1{,}6134}{-\ 4{,}2731} = \underline{-\ 0{,}3776}\ .$$

$$\underline{m_3} = \frac{K_4}{K_2} = \frac{-\ 1{,}7294}{-\ 4{,}2731} = \underline{+\ 0{,}4047}\ .$$

$$\underline{a_1} = k_1 - k_2 \cdot m_1 =$$

$$+\ 0{,}0564 - (-0{,}0943) \cdot -\ 0{,}8476 = \underline{-\ 0{,}0236}\ .$$

$$\underline{a_2} = k_3 - k_2 \cdot m_2 =$$

$$0{,}1603 - 0{,}0943 \cdot 0{,}3776 = \underline{+\ 0{,}1247}\ .$$

$$\underline{a_3} = k_4 - k_2 \cdot m_3 =$$

$$-0{,}1982 + 0{,}0943 \cdot 0{,}4047 = \underline{-\ 0{,}1601}\ .$$

$$\underline{d_1} = \frac{a_1}{a_3} = \frac{-\ 0{,}0236}{-\ 0{,}1601} = \underline{+\ 0{,}1473}\ .$$

$$\underline{d_2} = \frac{a_2}{a_3} = \frac{+\ 0{,}1247}{-\ 0{,}1601} = \underline{-\ 0{,}7788}\ .$$

$$\underline{k'} = m_1 - m_3 \cdot d_1 =$$

$$-\ 0{,}8476 - 0{,}4047 \cdot 0{,}1473 = \underline{-\ 0{,}9072}\ .$$

$$\underline{k''} = m_2 - m_3 \cdot d_2 =$$

$$-\ 0{,}3776 + 0{,}4047 \cdot 0{,}7788 = \underline{-\ 0{,}0624}\ .$$

Nunmehr sind alle Koeffizienten errechnet, die für jede Laststellung zwischen 1 und $\bar{1}$ in Betracht kommen. Es müssen jetzt die einzelnen Gleichungen nacheinander aufgestellt werden. Wir beginnen mit der Laststellung in der Mitte.

1.) $m = \bar{m} = 6$.

Es ist:

$$b_1^m - b_2^m \cdot k' - d_1 \cdot b_4^m =$$

$$(-4,6053)^6 + (-0,2171)^6 \cdot 0,9072$$

$$-0,1473 \cdot (-0,5392)^6 = \underline{9540}.$$

$$b_3^m - b_2^m \cdot k'' - d_2 \cdot b_4^m =$$

$$(-1,8548)^6 + (-0,2171)^6 \cdot 0,0624$$

$$+0,7788 \cdot (-0,5392)^6 = \underline{+ 40,73}.$$

$$\mu_1 \cdot b_1^{m-1} - \mu_2 \cdot k' \cdot b_2^{m-1} - \mu_4 \cdot d_1 \cdot b_4^{m-1} =$$

$$-1,500 \cdot (-4,6053)^5$$

$$-0,0707 \cdot 0,9072 \cdot (-0,2171)^5$$

$$+0,0313 \cdot 0,1473 \cdot (-0,5392)^5 = \underline{+ 3107}.$$

$$\mu_3 \cdot b_3^{m-1} - \mu_2 \cdot k' \cdot b_2^{m-1} - \mu_4 \cdot d_2 \cdot b_4^{m-1} =$$

$$-0,1075 \cdot (-1,8548)^5$$
$$-0,0707 \cdot 0,0624 \cdot (-0,2171)^5$$
$$-0,0313 \cdot 0,7788 \cdot (-0,5392)^5 = \underline{+ 2,362} .$$

Mit diesen Werten lassen sich die Gleichungen 1 und 4 schreiben :

$$9540 \quad (C_1+\bar{C}_1) + 40,73 \quad (C_3+\bar{C}_3) = -1,0$$
$$3107 \quad (C_1+\bar{C}_1) + 2,362 \quad (C_3+\bar{C}_3) = 0 .$$

Lösung : $(C_1+\bar{C}_1) = + 0,000\,022\,70$

$(C_3+\bar{C}_3) = - 0,029\,87$.

Da ausserdem : $(C_1-\bar{C}_1) = 0$

$(C_3-\bar{C}_3) = \underline{0}$,

---

folgt : $C_1 = \bar{C}_1 = + 0,000\,011\,35$

$C_3 = \bar{C}_3 = - 0,014\,93$.

Weiterhin finden wir : $C_4 = \bar{C}_4 = - C_1 \cdot d_1 - C_3 \cdot d_2 =$

$-0,000\,011\,35 \cdot 0,1473 - 0,01493 \cdot 0,7788 =$

$C_4 = \bar{C}_4 = - 0,01163$.

$$C_2 = - C_1 \cdot m_1 - C_3 \cdot m_2 - C_4 \cdot m_3 =$$

$$+ 0{,}000\,011\,35 \cdot 0{,}8476 - 0{,}014\,93 \cdot 0{,}3776$$

$$+ 0{,}011\,63 \cdot 0{,}4047 =$$

$$C_2 = \bar{C}_2 = - 0{,}000\,921 \ .$$

Man erhält nunmehr die Werte Z nach folgender For - mel die Werte :

$$Z_r = C_1 \cdot b_1^{\,r} + C_2 \cdot b_2^{\,r} + C_3 \cdot b_3^{\,r} + C_4 \cdot b_4^{\,r}$$

$$Z_0 = - 0{,}027 \quad t$$

$$Z_1 = + 0{,}034 \quad "$$

$$Z_2 = - 0{,}055 \quad "$$

$$Z_3 = + 0{,}096 \quad "$$

$$Z_4 = - 0{,}173 \quad "$$

$$Z_5 = + 0{,}305 \quad "$$

$$Z_6 = - 0{,}500 \quad "$$

In gleicher Weise findet man die Y - Werte zu

$$Y_r = B_1 \cdot b_1^{\,r} + B_2 \cdot b_2^{\,r} + B_3 \cdot b_3^{\,r} + B_4 \cdot b_4^{\,r} \ .$$

Sezt man die entsprechenden Werte ein, so erhält man mit

$B_1 = \alpha \cdot C_1 = 2,5995 \cdot 0,000\ 011\ 35 =$

$B_1 = + 0,000\ 029\ 51 \cdot$

$B_2 = - \alpha \cdot C_2 = + 2,5995 \cdot 0,000\ 921 =$

$B_2 = + 0,002\ 39 \cdot$

$B_3 = \beta \cdot C_3 = - 1,1007 \cdot 0,014\ 93 =$

$B_3 = - 0,0164 \cdot$

$B_4 = - \beta \cdot C_4 = +1,1007 \cdot 0,011\ 63 =$

$B_4 = + 0,012\ 80 \cdot$

$Y_o = - 0,001\ 2$ tm

$Y_1 = + 0,022\ 9$ "

$Y_2 = - 0,052\ 1$ "

$Y_3 = + 0,100\ 0$ "

$Y_4 = - 0,180\ 2$ "

$Y_5 = + 0,229\ 1$ "

$Y_6 = - 0,387\ 5$ "

2.) $m = 5$ und $\bar{m} = 7$.

Man erhält als Ergebnis folgendes Gleichungssystem :

c_1	c_3	$\bar{c}_1$	$\bar{c}_3$		
-2 071	-21,99	-43 930	-75,52	=	- 1,0
-5 385	-24,12	+114 200	+83,10	=	0
+3 714	+19,86	-78 760	-68,43	=	0
- 674,7	- 1,275	-14 31	- 4,379	=	0

Lösung :

$$c_1 = - 0,000\,052\,28$$

$$c_3 = + 0,027\,71$$

$$\bar{c}_1 = - 0,000\,002\,465$$

$$\bar{c}_3 = + 0,008\,043$$

Ferner wird nach:

$$c_4 = - c_1 \cdot d_1 - c_3 \cdot d_2 =$$

$$c_4 = + 0,021\,59$$

$$\bar{c}_4 = + 0,006\,264$$

Weiterhin bestimmen wir nach :

$$c_2 = - c_1 \cdot m_1 - c_3 \cdot m_2 - c_4 \cdot m_3 \; :$$

$$C_2 = + 0,001\ 682$$

$$\bar{C}_2 = + 0,000\ 500$$

Wir erhalten :

$Z_0 = + 0,051$ t

$Z_1 = - 0,063$ "

$Z_2 = + 0,101$ "

$Z_3 = - 0,175$ "

$Z_4 = + 0,306$ "

$Z_5 = - 0,501$ "

$Z_{\bar{0}} = + 0,015$

$Z_{\bar{1}} = - 0,018$

$Z_{\bar{2}} = + 0,029$

$Z_{\bar{3}} = - 0,052$

$Z_{\bar{4}} = + 0,095$

$Z_{\bar{5}} = - 0,172$

$Z_{\bar{6}} = + 0,304$

$Z_{\bar{7}} = - 0,499$

Ferner wird :

$$B_1 = a \cdot C_1 = - 0,000\ 135\ 9$$
$$B_2 = -a \cdot C_2 = - 0,004\ 37$$

$$B_3 = b \cdot C_3 = + 0,030\ 50$$

$$B_4 = -b \cdot C_4 = - 0,023\ 76$$

$$\bar{B}_1 = +a \cdot \bar{C}_1 = - 0,000\ 006\ 407$$
$$\bar{B}_2 = -a \cdot \bar{C}_2 = - 0,001\ 30$$

$$\bar{B}_3 = + \mathcal{b} \cdot \bar{C}_3 = + \quad 0{,}008\ 852$$
$$\bar{B}_4 = - \mathcal{b} \cdot \bar{C}_4 = - \quad 0{,}006\ 894 \ .$$

Wir erhalten :

$Y_0 = + \ 0{,}002\ 2$
$Y_1 = - \ 0{,}042\ 2$
$Y_2 = + \ 0{,}094\ 9$
$Y_3 = - \ 0{,}177\ 6$
$Y_4 = + \ 0{,}297\ 8$
$Y_5 = - \ 0{,}386\ 8$

$Y_{\bar{0}} = + \ 0{,}000\ 7$
$Y_{\bar{1}} = - \ 0{,}012\ 4$
$Y_{\bar{2}} = + \ 0{,}028\ 3$
$Y_{\bar{3}} = - \ 0{,}054\ 8$
$Y_{\bar{4}} = + \ 0{,}101\ 3$
$Y_{\bar{5}} = - \ 0{,}180\ 7$
$Y_{\bar{6}} = + \ 0{,}299\ 1$
$Y_{\bar{7}} = - \ 0{,}386\ 8$

3.) $m = 4$ und $\bar{m} = 8$.

Es entsteht das folgende Gleichungssystem :

C_1	C_3	$\bar{C}_1$	$\bar{C}_3$		
+ 449,8	+11,90	+202 300	+140,0	=	- 1,0
+1 169,3	+12,95	-526 000	-154,2	=	0
- 806,4	-10,67	+362 700	+126,9	=	0
+ 146,5	+ 0,6901	+ 65 900	+ 8,121	=	0

Lösung :

$$c_1 = + 0,000\ 240\ 7$$
$$c_3 = - 0,051\ 40$$
$$\bar{c}_1 = + 0,000\ 000\ 535\ 2$$
$$\bar{c}_3 = - 0,004\ 319$$

Ferner bestimmen sich die noch fehlenden Werte zu :

$$c_4 = - 0,040\ 06$$
$$\bar{c}_4 = - 0,003\ 364$$
$$c_2 = - 0,002\ 988$$
$$\bar{c}_2 = - 0,000\ 268\ 9$$

Wir erhalten :

$$z_0 = - 0,094$$
$$z_1 = + 0,116$$
$$z_2 = - 0,183$$
$$z_3 = + 0,311$$
$$z_4 = - 0,503$$

$$z_{\bar{0}} = - 0,008$$
$$z_{\bar{1}} = + 0,010$$
$$z_{\bar{2}} = - 0,016$$
$$z_{\bar{3}} = + 0,028$$
$$z_{\bar{4}} = - 0,051$$
$$z_{\bar{5}} = + 0,094$$
$$z_{\bar{6}} = - 0,171$$
$$z_{\bar{7}} = + 0,303$$
$$z_{\bar{8}} = - 0,497$$

Ferner wird :

$$B_1 = +a \cdot C_1 = + 0,000\,625\,8$$
$$B_2 = -a \cdot C_2 = + 0,007\,77$$
$$B_3 = +b \cdot C_3 = - 0,056\,57$$
$$B_4 = -b \cdot C_4 = + 0,044\,10 \quad .$$

$$\bar{B}_1 = +a \cdot C_1 = + 0,000\,001\,391$$
$$\bar{B}_2 = -a \cdot C_2 = + 0,000\,699$$
$$\bar{B}_3 = +b \cdot C_3 = - 0,004\,754$$
$$\bar{B}_4 = -b \cdot C_4 = + 0,003\,702 \,.$$

Wir erhalten :

$$Y_0 = - 0,004\,1$$
$$Y_1 = + 0,076\,6$$
$$Y_2 = - 0,168\,2$$
$$Y_3 = + 0,292\,9$$
$$Y_4 = - 0,384\,3$$

$$Y_{\bar{0}} = - 0,000\,4$$
$$Y_{\bar{1}} = + 0,006\,7$$
$$Y_{\bar{2}} = - 0,015\,2$$
$$Y_{\bar{3}} = + 0,029\,6$$
$$Y_{\bar{4}} = - 0,055\,3$$
$$Y_{\bar{5}} = + 0,101\,3$$
$$Y_{\bar{6}} = - 0,180\,2$$
$$Y_{\bar{7}} = + 0,297\,8$$
$$Y_{\bar{8}} = - 0,384\,2 \,.$$

4.) $m = 3$ und $\bar{m} = 9$.

Man erhält folgendes Gleichungssystem :

c_1	c_3		$\bar{c}_1$	$\bar{c}_3$		
- 97,66	-6,503	-	931 800	-259,8	=	1,0
-253,90	-6,887	+	2 422 000	+285,9	=	0
+175,10	+5,676	-	1 670 000	-235,5	=	0
- 31,82	-0,377 3	-	303 500	- 15,06	=	0

Lösung :

$$c_1 = - 0,001\ 103$$

$$c_3 = + 0,095\ 13$$

$$\bar{c}_1 = - 0,000\ 000\ 116\ 9$$

$$\bar{c}_3 = + 0,002\ 302$$

Weiterhin wird :

$$c_4 = + 0,074\ 25$$

$$\bar{c}_4 = + 0,001\ 793$$

$$c_2 = + 0,004\ 93$$

$$\bar{c}_2 = + 0,000\ 142 .$$

Wir erhalten :

$Z_0 = + 0,173$

$Z_1 = - 0,212$

$Z_2 = + 0,326$

$Z_3 = - 0,511$

$Z_{\bar{0}} = + 0,004\ 2$

$Z_{\bar{1}} = - 0,005\ 3$

$Z_{\bar{2}} = + 0,008\ 5$

$Z_{\bar{3}} = - 0,015\ 0$

$Z_{\bar{4}} = + 0,027\ 3$

$Z_{\bar{5}} = - 0,050\ 4$

$Z_{\bar{6}} = + 0,092\ 6$

$Z_{\bar{7}} = - 0,168\ 7$

$Z_{\bar{8}} = + 0,298\ 7$

$Z_{\bar{9}} = - 0,489$

Ferner wird :

$B_1 = + a \cdot C_1 = - 0,002\ 867$

$B_2 = - a \cdot C_2 = - 0,012\ 8$

$B_3 = + b \cdot C_3 = + 0,104\ 7$

$B_4 = - b \cdot C_4 = - 0,081\ 73$

$\bar{B}_1 = + a \cdot \bar{C}_1 = - 0,000\ 000\ 303\ 9$

$\bar{B}_2 = - a \cdot \bar{C}_2 = - 0,000\ 369$

$\bar{B}_3 = + b \cdot \bar{C}_3 = + 0,002\ 534$

$\bar{B}_4 = - b \cdot \bar{C}_3 = - 0,001\ 974$

Wir erhalten :

$Y_0 = + 0,007$

$Y_1 = - 0,134\ 2$

$Y_2 = + 0,275\ 0$

$Y_3 = - 0,375$

$Y_0 = + 0,000\ 2$

$Y_1 = - 0,003\ 6$

$Y_2 = + 0,008\ 1$

$Y_3 = - 0,015\ 8$

$Y_4 = + 0,029\ 7$

$Y_5 = - 0,054\ 9$

$Y_6 = + 0,100\ 3$

$Y_7 = - 0,177\ 9$

$Y_8 = + 0,293\ 4$

$Y_9 = - 0,375$

5.) $m = 2$ und $\bar{m} = 10$.

Man erhält folgendes Gleichungssystem :

C_1	C_3		$\bar{C}_1$	$\bar{C}_3$		
+21,21	+3,669	+	4 291 000	+481,8	=	1,0
+55,07	+3,530	-	11 155 000	-530,3	=	0
-37,98	-2,908	+	7 692 000	+436,7	=	0
+ 6,919	+0,213 6	+	1 398 000	+ 27,937	=	0

Lösung :

$$C_1 = + 0,005\ 106$$

$$C_3 = - 0,176\ 8$$

$$\bar{C}_1 = + 0,000\ 000\ 025\ 30$$

$$\bar{C}_3 = - 0,001\ 179$$

Weiterhin wird :

$$C_4 = - 0,138\ 5$$

$$\bar{C}_4 = - 0,000\ 918$$

$$C_2 = - 0,006\ 4$$

$$\bar{C}_2 = - 0,000\ 074$$

Wir erhalten :

$$Z_0 = - 0,317$$

$$Z_1 = + 0,381$$

$$Z_2 = - 0,541$$

$$Z_{\bar{0}} = - 0,002\ 2$$

$$Z_{\bar{1}} = + 0,002\ 7$$

$$Z_{\bar{2}} = - 0,004\ 3$$

$$Z_{\bar{3}} = + 0,007\ 7$$

$$Z_{\bar{4}} = - 0,014\ 0$$

$$Z_{\bar{5}} = + 0,025\ 9$$

$$Z_{\bar{6}} = - 0,047\ 8$$

$$Z_{\bar{7}} = + 0,087\ 9$$

$$Z_{\bar{8}} = - 0,160\ 0$$

$$Z_{\bar{9}} = + 0,282\ 7$$

$$Z_{\bar{1}\bar{0}} = - 0,459$$

Weiterhin wird :

$$B_1 = +a \cdot C_1 = + 0,013\ 27$$
$$B_2 = -a \cdot C_2 = + 0,016\ 6$$
$$B_3 = +b \cdot C_3 = - 0,194\ 6$$
$$B_4 = -b \cdot C_4 = + 0,152\ 4$$

$$\bar{B}_1 = +a \cdot \bar{C}_1 = + 0,000\ 000\ 065\ 8$$
$$\bar{B}_2 = -a \cdot \bar{C}_2 = + 0,000\ 192$$
$$\bar{B}_3 = +b \cdot \bar{C}_3 = - 0,001\ 298$$
$$\bar{B}_4 = -b \cdot \bar{C}_4 = + 0,001\ 010$$

Wir erhalten :

$Y_0 = - 0,012\ 3$

$Y_1 = + 0,214\ 0$

$Y_2 = - 0,343$

$Y_{\bar{0}} = - 0,000\ 1$

$Y_{\bar{1}} = + 0,001\ 8$

$Y_{\bar{2}} = - 0,004\ 2$

$Y_{\bar{3}} = + 0,008\ 1$

$Y_{\bar{4}} = - 0,015\ 3$

$Y_{\bar{5}} = + 0,028\ 3$

$Y_{\bar{6}} = - 0,052\ 1$

$Y_{\bar{7}} = + 0,095\ 1$

$Y_{\bar{8}} = - 0,168\ 5$

$Y_{\bar{9}} = + 0,275\ 9$

$Y_{\bar{1}\bar{0}} = - 0,343$

6.) m = 1 und m = 11 .

Man erhält folgendes Gleichungssystem :

c_1	c_3	$\bar{c}_1$	$\bar{c}_3$		
- 4,723	-2,288	-19 761 000	-893,6	=	- 1,0
- 11,547	-1,544	+51 370 000	+983,6	=	0
+ 7,975	+1,276	-35 426 000	+810,0	=	0
- 1,560	-0,136 3	- 6 437 000	- 51,8	=	0

Lösung:

$c_1 = - 0,023\ 52$

$c_3 = + 0,328\ 0$

$\bar{c}_1 = - 0,000\ 000\ 005\ 47$

$\bar{c}_3 = + 0,000\ 524$

Ferner wird :

$c_4 = + 0,258\ 9$

$\bar{c}_4 + 0,000\ 408$

$\bar{c}_2 - 0,000\ 93$

$\bar{c}_2 = + 0,000\ 033$.

Wir erhalten :

$Z_0 = + 0,562$

$Z_1 = - 0,640$

$Z_{\bar{0}} = + 0,001$

$Z_{\bar{1}} = - 0,001$

$Z_{\bar{2}} = + 0,002$

$Z_{\bar{3}} = - 0,004$

$Z_{\bar{4}} = + 0,006$

$Z_{\bar{5}} = - 0,012$

$Z_{\bar{6}} = + 0,021$

$Z_{\bar{7}} = - 0,039$

$Z_{\bar{8}} = + 0,072$

$Z_{\bar{9}} = - 0,131$

$Z_{\bar{1}\bar{0}} = + 0,229$

$Z_{\bar{1}\bar{1}} = - 0,360$.

Weiterhin wird :

$B_1 = +a \cdot C_1 = - 0,061\ 14$

$B_2 = -a \cdot C_2 = + 0,002\ 4$

$B_3 = +b \cdot C_3 = + 0,361\ 0$

$B_4 = -b\,b\ C_4 = - 0,285\ 0$.

$$\bar{B}_1 = +a \cdot \bar{C}_1 = -\ 0{,}000\ 000\ 014\ 22$$
$$\bar{B}_2 = -a \cdot \bar{C}_2 = -\ 0{,}000\ 086$$
$$\bar{B}_3 = +b \cdot \bar{C}_3 = +\ 0{,}000\ 577$$
$$\bar{B}_4 = -b \cdot \bar{C}_4 = -\ 0{,}000\ 449$$

Wir erhalten :

$Y_0 = +\ 0{,}017$

$Y_1 = -\ 0{,}234$

$Y_{\bar{0}} = +\ 0{,}000\ 0$

$Y_{\bar{1}} = -\ 0{,}000\ 8$

$Y_{\bar{2}} = +\ 0{,}001\ 9$

$Y_{\bar{3}} = -\ 0{,}003\ 6$

$Y_{\bar{4}} = +\ 0{,}006\ 8$

$Y_{\bar{5}} = -\ 0{,}012\ 6$

$Y_{\bar{6}} = +\ 0{,}023\ 3$

$Y_{\bar{7}} = -\ 0{,}043\ 0$

$Y_{\bar{8}} = +\ 0{,}077\ 9$

$Y_{\bar{9}} = -\ 0{,}136\ 6$

$Y_{\bar{\bar{1}}0} = +\ 0{,}217$

$Y_{\bar{\bar{1}}\bar{1}} = -\ 0{,}235$

7.) $m = 0$.

Man erhält folgendes Gleichungssystem :

c_1	c_2	c_3	c_4	
+ 3,622	- 4,273	+1,613	-1,729	= 0
+ 0,056 38	- 0,094 34	+0,160 3	-0,198 2	= n
+388 898 800	-34,856 $\underline{0}.10^{-9}$	+2 866,4	-0,000 973 4	= 0
+ 8,586 000	- 0,619 $\underline{5}.10^{-9}$	+ 328,58	-0,000 096 70	= 0

worin $n = - 0,018\ 98$.

Lösung :

$c_1 = + 0,000\ 000\ 000\ 000\ 051$

$c_2 = - 0,048\ 00$

$c_3 = + 0,000\ 000\ 033\ 31$

$c_4 = + 0,118\ 6$

Wir erhalten:

$z_0 = + 0,071$

$z_1 = - 0,054$

$z_2 = + 0,032$

$z_3 = - 0,018$

$z_4 = + 0,010$

$z_5 = - 0,005$

$z_6 = + 0,003$

Die folgenden Werte sind nicht mehr ermittelt, da sie als sehr kleine Grössen nicht mehr in Betracht kommen. Weiterhin wird :

$$B_1 = + 0,000\ 000\ 000\ 000\ 133$$

$$B_2 = + 0,124\ 8$$

$$B_3 = + 0,000\ 000\ 036\ 66$$

$$B_4 = - 0,130\ 5$$

Wir erhalten :

$$Y_0 = - 0,005\ 8$$

$$Y_1 = + 0,043\ 3$$

$$Y_2 = - 0,032\ 0$$

$$Y_3 = + 0,019\ 2$$

$$Y_4 = - 0,010\ 8$$

$$Y_5 = + 0,005\ 9$$

$$Y_6 = - 0,003\ 2$$

Die folgenden Werte sind nicht mehr ermittelt, da sie ebenfalls als sehr kleine Grössen nicht mehr in Betracht kommen.

---

2. Teil.

Wir erhielten zur Bestimmung der Werte c_1 und c_2 die quadratische Gleichung :

$$c^2 \cdot \varphi + c \cdot \chi + \varphi = 0 .$$

Setzen wir die Werte für φ und χ ein, so folgt :

$$c_1 = - 1,2234$$

$$c_2 = - 0,8174$$

Weiterhin war :

$$\alpha_1 = \frac{\chi}{2} - h \cdot \frac{J_d}{F_d} + \varphi \cdot c_1$$

$$\alpha_2 = \frac{\chi}{2} - h \cdot \frac{J_d}{F_d} + \varphi \cdot c_2 .$$

Wir erhalten zahlenmässig :

$$\alpha_1 = + 0,2843$$

$$\alpha_2 = - 0,8093 .$$

Ferner wird :

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = - 2,847$$

$$(\varphi + \frac{\chi}{2} \cdot c_2) = - 0,4469$$

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} (\varphi + \frac{\chi}{2} \cdot c_1) = - 1,904$$

$$0{,}5 \cdot h \cdot \frac{J_d}{F_d} \cdot \frac{1}{\alpha_1} = + 0{,}4617$$

$$0{,}5 \cdot h \cdot \frac{J_d}{F_d} \cdot \frac{1}{\alpha_1} \left(\varphi + \frac{\chi}{2} \cdot c_1\right) = + 0{,}3088 .$$

Diese Werte lassen sich im voraus entwickeln. Nunmehr sind die Gleichungen für die einzelnen Laststellungen aufzulösen .

1.) $m = 6$ und $\bar{m} = 6$.

$A = B = 1$.

Bei dieser Laststellung lässt sich die Gleichung 2 schreiben :

$$C_2 - \bar{C}_2 = 0 .$$

Gleichung 1 lautet :

$$(C_2 + \bar{C}_2) \cdot 9{,}844 = - 3{,}0961 .$$

Man erhält :

$$C_2 = \bar{C}_2 = - 0{,}1573 .$$

Nunmehr folgt :

$$C_1 = 0{,}5\ h \cdot \frac{J_d}{F_d} \cdot \frac{1}{\alpha_1} \cdot A - C_2 + \frac{\alpha^2}{\alpha_1} =$$

$$C_1 = \bar{C}_1 = + 0{,}013\ 99 .$$

Nach $$Z_r = 0{,}5\ A + C_1 \cdot c_1^{\,r} + C_2 \cdot c_2^{\,r}$$

$$Z_{\bar{r}} = 0{,}5\ B + \bar{C}_1 \cdot c_1^{\,\bar{r}} + \bar{C}_2 \cdot c_2^{\,\bar{r}}$$

erhalten wir :

$$Z_0 = + 0{,}357$$
$$Z_1 = + 0{,}611$$
$$Z_2 = + 0{,}416$$
$$Z_3 = + 0{,}560$$
$$Z_4 = + 0{,}461$$
$$Z_5 = + 0{,}519$$
$$Z_6 = + 0{,}500 \quad .$$

2.) $m = 5$ und $\bar{m} = 7$.

$$A = \frac{7}{6} = 1{,}167 \quad \ldots\ldots$$
$$B = \frac{5}{6} = 0{,}833 \quad \ldots\ldots$$

Wir erhalten folgendes Gleichungssystem :

C_2	$\bar{C}_2$	
- 8,167	- 11,922	= + 3,0545
+ 4,067	- 6,252	= + 0,0558

Lösung : $C_2 = - 0{,}1852$

$\bar{C}_2 = - 0{,}1294$.

Weiterhin folgt :

$C_1 = + 0{,}011\ 50$

$\bar{C}_1 = + 0{,}016\ 47$.

Dann wird :

$Z_0 = + 0,410$

$Z_1 = + 0,721$

$Z_2 = + 0,477$

$Z_3 = + 0,663$

$Z_4 = + 0,526$

$Z_5 = + 0,619$

$Z_{\bar{0}} = + 0,304$

$Z_{\bar{1}} = + 0,502$

$Z_{\bar{2}} = + 0,355$

$Z_{\bar{3}} = + 0,457$

$Z_{\bar{4}} = + 0,396$

$Z_{\bar{5}} = + 0,419$

$Z_{\bar{6}} = + 0,433$

$Z_{\bar{7}} = + 0,381$

3.) $m = 4$ und $\bar{m} = 8$.

$$A = \frac{4}{3} = 1,333 \quad .....$$

$$B = \frac{2}{3} = 0,667 \quad .....$$

Wir erhalten :

C_2	$\bar{C}_2$	
+ 6,823	+ 14,487	= - 2,924
- 3,243	+ 7,704	= - 0,0906

Lösung : $C_2 = - 0,2131$

$\bar{C}_2 = - 0,1015$.

Weiterhin folgt :

$$C_1 = + 0,\ 009\ 024$$

$$\bar{C}_1 = + 0,\ 018\ 95 .$$

Dann wird :

$Z_0 = + 0,463$

$Z_1 = + 0,830$

$Z_2 = + 0,538$

$Z_3 = + 0,766$

$Z_4 = + 0,592$

$Z_{\bar{0}} = + 0,251$

$Z_{\bar{1}} = + 0,393$

$Z_{\bar{2}} = + 0,294$

$Z_{\bar{3}} = + 0,354$

$Z_{\bar{4}} = + 0,330$

$Z_{\bar{5}} = + 0,318$

$Z_{\bar{6}} = + 0,367$

$Z_{\bar{7}} = + 0,280$

$Z_{\bar{8}} = + 0,408$

4.) $m = 3$ und $\bar{m} = 9$.

$$A = \frac{3}{2} = 1,5$$

$$B = \frac{1}{2} = 0,5 .$$

Wir erhalten :

C_2	$\ddot{C}_2$	
- 5,759	- 17,643	= + 2,685
+ 2,552	- 9,469	= + 0,0817

Lösung :

$$c_2 = - \ 0{,}2410$$

$$\bar{c}_2 = - \ 0{,}07356 \ .$$

Weiterhin folgt :

$$c_1 = + \ 0{,}006\,543$$

$$\bar{c}_1 = + \ 0{,}021\,43 \ .$$

Dann wird :

$z_0 = + \ 0{,}516$

$z_1 = + \ 0{,}939$

$z_2 = + \ 0{,}599$

$z_3 = + \ 0{,}870$

$z_{\bar{0}} = + \ 0{,}198$

$z_{\bar{1}} = + \ 0{,}284$

$z_{\bar{2}} = + \ 0{,}233$

$z_{\bar{3}} = + \ 0{,}251$

$z_{\bar{4}} = + \ 0{,}265$

$z_{\bar{5}} = + \ 0{,}218$

$z_{\bar{6}} = + \ 0{,}300$

$z_{\bar{7}} = + \ 0{,}180$

$z_{\bar{8}} = + \ 0{,}343$

$z_{\bar{9}} = + \ 0{,}130$

5.) $m = 2$ und $\bar{m} = 10$.

$$A = \frac{5}{3} = 1{,}667 \ \ldots\ldots$$

$$B = \frac{1}{3} = 0{,}333 \ \ldots\ldots$$

c_2	$\bar{c}_2$	
+ 4,929	+ 21,518	= - 2,308
- 1,964	+ 11,621	= - 0,002 41

Lösung : $c_2 = - 0,2689$

$\bar{c}_2 = - 0,045\ 66$

Weiterhin folgt :

$c_1 = + 0,004\ 060$

$\bar{c}_1 = + 0,023\ 91$.

Dann wird :

$z_0 = + 0,569$

$z_1 = + 1,048\ 13$

$z_2 = + 0,659\ 8$

$\bar{z}_0 = + 0,145$

$\bar{z}_1 = + 0,175$

$\bar{z}_2 = + 0,172$

$\bar{z}_3 = + 0,148$

$\bar{z}_4 = + 0,200$

$\bar{z}_5 = + 0,118$

$\bar{z}_6 = + 0,233$

$\bar{z}_7 = + 0,080$

$\bar{z}_8 = + 0,273$

$\bar{z}_9 = + 0,027$

$\bar{\bar{z}}_{10} = + 0,340$.

6.) $m = 1$ und $\bar{m} = 11$.

$A = \frac{11}{6} = 1{,}833 \ldots$ $\quad B = \frac{1}{6} = 0{,}167 \ldots$

Wir erhalten :

C_2	$\bar{C}_2$	
$- 4{,}300$	$- 26{,}27$	$= + 1{,}743$
$+ 1{,}457$	$- 14{,}25$	$= - 0{,}1795$

Lösung : $C_2 = - 0{,}2968$

$\bar{C}_2 = - 0{,}017\,76$

Weiterhin folgt : $C_1 = + 0{,}001\,579$

$\bar{C}_1 = + 0{,}026\,39$.

Dann wird :

$Z_0 = + 0{,}621$

$Z_1 = + 1{,}157$

$Z_{\bar{0}} = + 0{,}092$

$Z_{\bar{1}} = + 0{,}066$

$Z_{\bar{2}} = + 0{,}111$

$Z_{\bar{3}} = + 0{,}045$

$Z_{\bar{4}} = + 0{,}135$

$Z_{\bar{5}} = + 0{,}017$

$Z_{\bar{6}} = + 0{,}167$

$Z_{\bar{7}} = - 0{,}021$

$Z_{\bar{8}} = + 0{,}212$

$Z_{\bar{9}} = - 0{,}076$

$Z_{\bar{10}} = + 0{,}279$

$Z_{\bar{11}} = - 0{,}157$

Wir erhielten zur Bestimmung der Werte b_1 und b_2 die quadratische Gleichung :

$$\alpha + \beta \cdot b + \alpha \cdot b^2 = 0 .$$

Die Werte α und β bestimmen sich zahlenmässig zu :

$$\alpha = + 1,338$$
$$\beta = + 8,346 ,$$

die Wurzeln der quadratischen Gleichung ergeben sich zu:

$$b_1 = - 6,071$$
$$b_2 = - 0,164\ 7$$

Ferner wird :

$$N_{01} = 0$$
$$N_02 = + A \frac{\lambda}{h} \cdot \cos \alpha_1 = 0,5578 \cdot A$$
$$N_{03} = - A.r. \frac{\lambda}{h} = - 0,8571 \cdot A.r .$$

$$L_1 = 0; \quad L_2 = 0 ; \quad L_3 = A. \frac{\lambda}{2} = 4,5\ A.$$

In der gleichen Weise wie früher folgen :

$$C_1 = - 122,69 \cdot A + 0,4408 \cdot A.r$$
$$C_2 = + 0,3387 \cdot A + 0,4408 \cdot A.r$$
$$C_3 = - 251,04 \cdot A - 0,8816 \cdot A.r.$$

$$M_1 = - 0,9443 \cdot A + 0,009\,383 \cdot A.r$$

$$M_2 = + 0,9350 \cdot A + 0,009\,383 \cdot A.r$$

$$M_3 = - 2,244 \cdot A - 0,012\,44 \cdot A.r \cdot$$

Ebenso :

$$N_{01} = + \frac{A}{\sin\alpha_2} = + 1,3171 \cdot A$$

$$N_{02} = - A.\sin\alpha_1 = - 0,7593 \cdot A$$

$$N_{03} = A.\frac{\lambda}{h} (r-1) = + 0,8571 \cdot A (r-1) .$$

$$L_1 = 0 \; ; \quad L_2 = 0 \; ; \quad L_3 = A.\frac{\lambda}{2} = 4,5 A .$$

Dann folgt :

$$C_1 = - 121,77 \cdot A - 0,4408 \cdot A (r-1) .$$

$$C_2 = - 0,5833 \cdot A - 0,4408 \cdot A (r-1) .$$

$$C_3 = - 251,04 \cdot A + 0,8816 \cdot A (r-1) .$$

$$M_1 = - 0,9209 \cdot A - 0,009\,383 \cdot A.r .$$

$$M_2 = + 0,9302 \cdot A - 0,009\,383 \cdot A.r .$$

$$M_3 = - 2,2562 \cdot A + 0,012\,44 \cdot A.r .$$

Wir erhielten für das Feld r den Beitrag :

$$+ \; c_1 \cdot A + \frac{\gamma}{2} \cdot A.r \; .$$

---

1) Beiträge der Momente der Gurtstäbe :

$$\frac{s_3}{6}((M_{2u}-M_{2o}).M_2'+((M_1+L_1+M_2)_u-(M_1+L_1+M_2)_o).(M_1+L_1+M_2)'$$
$$+((M_1+L_1)_u-(M_1+L_1)_o).(M_1+L_1)') =$$

$$+ 0{,}007\,839 \; . \; A - 0{,}051\,59 \; . \; A.r \; .$$

---

2) Beiträge der inneren Diagonalstäbe :

$$\frac{s}{6}.\frac{J_c}{J}((M_{3u}-M_{3o}).M_3'+((M_2+L_2+M_3)_u-(M_2+L_2+M_3)_o)(M_2+L_2+M_3)'$$
$$+((M_2+L_2)_u-(M_2+L_2)_o)(M_2+L_2)') =$$

$$\frac{s}{6}.\frac{J_c}{J}(+ 0{,}003\,072\,6 \; . \; A + 0{,}006\,363 \; [\text{illegible}] \; . \; A.r) \; .$$

---

3) Beiträge der äusseren Diagonalstäbe :

$$\frac{s}{6}.\frac{J_c}{J}((M_{1u}-M_{1o}).M_1'+((M_1+L_3+M_3)_u-(M_1+L_3+M_3)_o)(M_1+M_3+L_3)'$$
$$+((M_3+L_3)_u-(M_3+L_3)_o(M_3+L_3)' =$$

$$\frac{s}{6}.\frac{J_o}{J}(-0{,}004\,257 \; . \; A + 0{,}004\,463 \; . \; A.r \;) \; .$$

Gesamtbeitrag der Momente :

$$+ 0{,}002\,379 \; . \; A - 0{,}001\,679 \; . \; A.r \; .$$

Wir haben noch die Normalkräfte im oberen und unteren Dreieck zu ermitteln. Wir erhalten:

oben:

$$N_1 = -\ 0{,}119\ 0 \cdot A - 0{,}002\ 70 \cdot A.r \cdot$$

$$N_2 = +\ 0{,}121\ 7 \cdot A - 0{,}002\ 70 \cdot A.r \cdot$$

$$N_3 = +\ 0{,}426\ 5 \cdot A - 0{,}853\ 0 \cdot A.r \cdot$$

unten :

$$N_1 = +\ 1{,}193\ 0 \cdot A + 0{,}002\ 705 \cdot A.r \cdot$$

$$N_2 = -\ 1{,}195\ 7 \cdot A + 0{,}002\ 705 \cdot A.r \cdot$$

$$N_3 = -\ 0{,}426\ 5 \cdot A + 0{,}853\ 0 \cdot A.r \cdot$$

Mit diesen Werten liefert das untere Dreieck den Beitrag :

$$N_3 \cdot N_3' \cdot s_3 \cdot \frac{J_c}{F} + (N_1 \cdot N_1' + N_2 \cdot N_2') \cdot s \cdot \frac{J_c}{F} =$$

$$+\ 0{,}205\ 4 \cdot A + 0{,}030\ 87 \cdot A.r .$$

Das obere Dreieck ergibt :

$$-N_3 \cdot N_3' \cdot s_3 \cdot \frac{J_c}{F} - (N_1 \cdot N_1' + N_2 \cdot N_2') \cdot s \cdot \frac{J_c}{F} =$$

$$+\ 0{,}006\ 815 \cdot A + 0{,}030\ 87 \cdot A.r \cdot$$

Gesamtbeitrag der Normalkräfte :

$$+\ 0{,}212\ 2 \cdot A + 0{,}061\ 74 \cdot A.r \cdot$$

Analog ergibt sich der Gesamtbeitrag der Querkräfte zu :

$$- 0{,}001\,956 \cdot A + 0{,}001\,710 \cdot A.r \cdot$$

Damit folgt :

$$c_1 \cdot A + \frac{\gamma}{2} \cdot A.r = + 0{,}2126 \cdot A + 0{,}061\,78 \cdot A.r ,$$

also

$$c_1 = + 0{,}212\,6$$

$$\gamma = + 0{,}123\,59 \cdot$$

$$\mu = \left(\frac{h}{3} \cdot \frac{J_c}{J_d} + \frac{4}{h} \cdot K_d \cdot \frac{E}{G} \cdot \frac{J_c}{F_d} + \frac{\beta}{2}\right) = 18{,}351 \cdot$$

$$K = \frac{\gamma}{2\alpha + \beta} = 0{,}011\,21 \cdot$$

$$\mu + \alpha \cdot b_2 = + 18{,}130$$

$$\mu + \alpha \cdot b_1 = + 10{,}226$$

$$c_1 - \alpha \cdot K = + 0{,}197\,6 \cdot$$

$$m_1 = 0{,}010\,90 \qquad m_2 = 0{,}564\,0 \cdot$$

$$\alpha + \frac{\beta}{2} \cdot b_1 = - 23{,}994 \qquad \alpha + \frac{\beta}{2} \cdot b_2 = + 0{,}651\,03 \cdot$$

$$m_2\left(\alpha + \frac{\beta}{2} \cdot b_2\right) = + 0{,}367\,19 \qquad m_1\left(\alpha + \frac{\beta}{2} \cdot b_2\right) = - 0{,}261\,50 \cdot$$

$$2(c_1 + \alpha K) = + 0{,}455\,19 \cdot$$

Diese Werte liessen sich im voraus ermitteln. Nunmehr müssen die Laststellungen einzeln berechnet werden .

1) $m = 6$ und $\bar{m} = 6$.

$A = B = 1,0$. Es folgt :

1.) $C_1 - \bar{C}_1 = 0$.

2.) $197\,860\,(C_1 + \bar{C}_1) = +\ 0,455\,13$.

$$C_1 + \bar{C}_1 = 0,000\,002\,300$$

$$C_1 = \bar{C}_1 = +\ 0,000\,001\,150 .$$

Man erhält : $C_2 = \bar{C}_2 = +\ 0,010\,90$.

Es folgt :

$$X_0 = +\ 0,\ 010\,9$$
$$X_1 = +\ 0,\ 009\,6$$
$$X_2 = +\ 0,\ 022\,8$$
$$X_3 = +\ 0,\ 033\,3$$
$$X_4 = +\ 0,\ 046\,4$$
$$X_5 = +\ 0,\ 046\,6$$
$$X_6 = +\ 0,\ 124\,8 .$$

2.) $m = 5$ und $\bar{m} = 7$.

$$A = \frac{7}{6} = 1{,}166\,7\ldots \qquad B = \frac{5}{6} = 0{,}833\,3\ldots$$

Wir erhalten folgendes Gleichungssystem :

c_1	$\bar{c}_1$	
- 8 246	+ 303 900	= + 0,000 001 4
- 32 590	- 1201 200	= + 0,455 42

Lösung : $c_1 = -\ 0{,}000\,006\,987$

$\bar{c}_1 = -\ 0{,}000\,000\,189\,6$.

Man erhält : $c_2 = +\ 0{,}012\,72$

$\bar{c}_2 = +\ 0{,}009\,082$.

Es folgt :

$X_0 = +\ 0{,}012\,7$
$X_1 = +\ 0{,}011\,0$
$X_2 = +\ 0{,}026\,2$
$X_3 = +\ 0{,}040\,7$
$X_4 = +\ 0{,}042\,8$
$X_5 = +\ 0{,}123\,0$

$X_{\bar{0}} = +\ 0{,}009\,1$
$X_{\bar{1}} = +\ 0{,}007\,8$
$X_{\bar{2}} = +\ 0{,}018\,9$
$X_{\bar{3}} = +\ 0{,}028\,0$
$X_{\bar{4}} = +\ 0{,}037\,1$
$X_{\bar{5}} = +\ 0{,}048\,3$
$X_{\bar{6}} = +\ 0{,}046\,6$
$X_{\bar{7}} = +\ 0{,}123\,0$.

3.) $m = 4$ und $\bar{m} = 8$.

$$A = \frac{4}{3} = 1{,}333 \qquad B = \frac{2}{3} = 0{,}667$$

Wir erhalten folgendes Gleichungssystem :

C_1	$\bar{C}_1$	
+ 1 358	- 1 845 000	= - 0,000 010 7
+ 5 369	+ 7 292 000	= + 0,453 63

Lösung : $C_1 = + 0{,}000\,042\,25$; $\bar{C}_1 = + 0{,}000\,000\,031\,1$

Es folgt : $C_2 = + 0{,}014\,51$; $\bar{C}_2 = + 0{,}007\,266$

Man erhält :

$X_0 = + 0{,}014\,5$
$X_1 = + 0{,}012\,3$
$X_2 = + 0{,}031\,8$
$X_3 = + 0{,}035\,3$
$X_4 = + 0{,}117\,2$

$X_{\bar{0}} = + 0{,}007\,3$
$X_{\bar{1}} = + 0{,}006\,3$
$X_{\bar{2}} = + 0{,}015\,1$
$X_{\bar{3}} = + 0{,}022\,4$
$X_{\bar{4}} = + 0{,}029\,9$
$X_{\bar{5}} = + 0{,}037\,1$
$X_{\bar{6}} = + 0{,}046\,4$
$X_{\bar{7}} = + 0{,}042\,9$
$X_{\bar{8}} = + 0{,}117\,2$.

4.) $m = 3$ und $\bar{m} = 9$.

$$A = \frac{3}{2} = 1{,}5 \; ; \qquad B = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

Wir erhalten folgendes Gleichungssystem :

C_1	$\bar{C}_1$	
- 223,7	+ 11 201 000	= + 0,000 073 0
- 884,3	- 44 269 000	= + 0,465 83

Lösung : $C_1 = - 0{,}000\,263\,6$; $\bar{C}_1 = - 0{,}000\,000\,005\,259$.

Es folgt : $C_2 = + 0{,}016\,50$; $\bar{C}_2 = + 0{,}005\,449$.

Man erhält :

$X_0 = + 0{,}016\,2$

$X_1 = + 0{,}015\,7$

$X_2 = + 0{,}024\,4$

$X_3 = + 0{,}109\,4$

$X_{\bar{0}} = + 0{,}005\,4$

$X_{\bar{1}} = + 0{,}004\,7$

$X_{\bar{2}} = + 0{,}011\,4$

$X_{\bar{3}} = + 0{,}016\,8$

$X_{\bar{4}} = + 0{,}022\,4$

$X_{\bar{5}} = + 0{,}028\,1$

$X_{\bar{6}} = + 0{,}033\,4$

$X_{\bar{7}} = + 0{,}040\,8$

$X_{\bar{8}} = + 0{,}035\,1$

$X_{\bar{9}} = + 0{,}109\,4$.

5.) $m = 2$ und $\bar{m} = 10$.

$$A = \frac{5}{3} = 1{,}667 \quad ; \qquad B = \frac{1}{3} = 0{,}333$$

Wir erhalten folgendes Gleichungssystem :

c_1	$\bar{c}_1$	
+ 36,84	- 67 998 000	= - 0,000 492 7
+ 145,42	+ 268 200 000	= + 0,383 40

Lösung : $c_1 = + 0{,}001\ 312$; $\bar{c}_1 = + 0{,}000\ 000\ 000\ 718\ 0$

Es folgt : $c_2 = + 0{,}017\ 42$; $\bar{c}_2 = + 0{,}003\ 633$.

Man erhält :

$x_0 = + 0{,}018\ 7$

$x_1 = + 0{,}007\ 8$

$x_2 = + 0{,}086\ 2$

$\bar{x}_0 = + 0{,}003\ 6$

$\bar{x}_1 = + 0{,}003\ 1$

$\bar{x}_2 = + 0{,}007\ 6$

$\bar{x}_3 = + 0{,}011\ 2$

$\bar{x}_4 = + 0{,}014\ 9$

$\bar{x}_5 = + 0{,}018\ 7$

$\bar{x}_6 = + 0{,}022\ 5$

$\bar{x}_7 = + 0{,}025\ 9$

$\bar{x}_8 = + 0{,}031\ 2$

$\bar{x}_9 = + 0{,}025\ 6$

$\bar{x}_{10} = + 0{,}086\ 2$

b.) $m = 1$ und $\bar{m} = 11$.

$$A = -\frac{11}{6} = 1{,}833 \; ; \qquad B = -\frac{1}{6} = 0{,}167$$

Wir erhalten folgendes Gleichungssystem :

C_1	$\bar{C}_1$
− 5,978	+ 412 810 000 = + 0,003 291 2
− 24,361	− 1631 500 000 = + 0,934 61

Lösung : $C_1 = -0{,}019\,75$; $\bar{C}_1 = -0{,}000\,000\,000\,278\,0$

Es folgt: $C_2 = +0{,}031\,12$; $\bar{C}_2 = +0{,}001\,816$.

Man erhält :

$X_0 = +0{,}011\,4$

$X_1 = +0{,}135\,3$

$\bar{X}_0 = +0{,}001\,8$

$\bar{X}_1 = +0{,}001\,6$

$\bar{X}_2 = +0{,}003\,8$

$\bar{X}_3 = +0{,}005\,6$

$\bar{X}_4 = +0{,}007\,5$

$\bar{X}_5 = +0{,}009\,3$

$\bar{X}_6 = +0{,}011\,2$

$\bar{X}_7 = +0{,}013\,2$

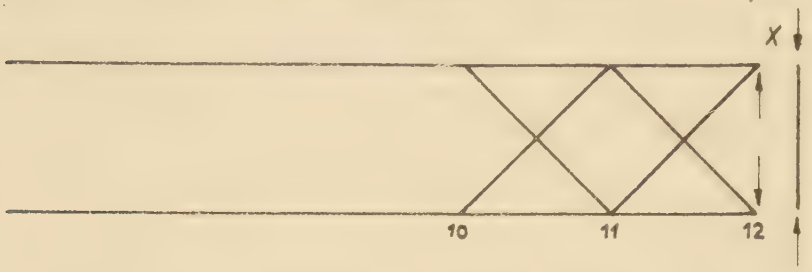
$\bar{X}_8 = +0{,}014\,4$

$\bar{X}_9 = +0{,}019\,9$

$\bar{X}_{10} = -0{,}000\,2$

$\bar{X}_{11} = +0{,}135\,4$.

Wir rechnen den Träger jetzt als Gelenkfachwerk, um einen Überblick zu bekommen über die Unterschiede einer strengen Rechnung und der üblichen Näherungsrechnung. Der Träger ist einfach statisch unbestimmt. Wir schneiden den Endriegel, die in ihm übertragene Kraft sei die statisch unbestimmte Grösse X.



Für $X_a = -1$ erhalten wir im Feld 12

für die Diagonalen : $-1{,}317$,

" " Gurtstäbe : $+0{,}857$.

Für die folgenden Felder bleiben die absoluten Beträge, lediglich die Vorzeichen wechseln. Beachten wir, dass E.F als konstanter Faktor weggelassen werden kann, so erhalten wir :

$$X = \frac{\sum S_0 \cdot S_a \cdot s}{\sum S_a^2 \cdot s} \quad .$$

Der Beitrag eines Elementes zu diesen Summen lässt sich schreiben :

1.) Diagonalen : $4.1{,}317^2 . 6{,}915 = + 47{,}98$

2.) Gurtstäbe : $2.0{,}857^2 . 9{,}0 = + 13{,}22$

Beitrag eines Elementes : $+ 61{,}20$.

$$\sum S_a^{\,2} . s = 12.61{,}20 + 2 . 1^2 . 10{,}5 = 755{,}4 .$$

Die Werte: $\sum S_o . S_a . s$ sind für jede Laststellung analog zu ermitteln . Wir erhalten für die einzelnen Laststellungen des ersten Belastungsfalles .

$X_o = - 0{,}014$
$X_1 = + 0{,}095$
$X_2 = - 0{,}176$
$X_3 = + 0{,}257$
$X_4 = - 0{,}338$
$X_5 = + 0{,}419$
$X_6 = - 0{,}500$
$X_7 = + 0{,}581$
$X_8 = - 0{,}662$
$X_9 = + 0{,}743$
$X_{10} = - 0{,}824$
$X_{11} = + 0{,}905$
$X_{12} = - 0{,}986$.

Analog folgt für den zweiten Belastungsfall :

$X_o = + 0{,}014$
$X_1 = + 0{,}095$
$X_2 = + 0{,}176$
$X_3 = + 0{,}257$
$X_4 = + 0{,}338$
$X_5 = + 0{,}419$
$X_6 = + 0{,}500$.
$X_7 = + 0{,}581$
$X_8 = + 0{,}662$
$X_9 = + 0{,}743$
$X_{10} = + 0{,}824$
$X_{11} = + 0{,}905$
$X_{12} = + 0{,}986$.

Ergebnisse vorliegender Arbeit .

Wir ermitteln auf Grund vorliegender Resultate die Einflusslinien sämtlicher Stäbe im Felde 4 und des Endriegels bei einer über den Untergurt wandernden Last 1. Wir erhalten :

Einflusslinien .(Gelenkfachwerk)

	1.) Obergurt.	2.) Untergurt	3.)Diagonale ob.lks.
0	0	0	0
1	-0,653	+0,562	+0,015
2	-1,143	+1,286	-0,220
3	-1,935	+1,708	+0,009
4	-2,286	+1,714	+0,878
5	-1,502	+1,998	+0,003
6	-1,714	+1,286	+0,659
7	-1,070	+1,431	-0,003
8	-1,143	+0,857	+0,439
9	-0,637	+0,863	-0,009
10	-0,572	+0,429	+0,220
11	-0,204	+0,296	-0,015
12	0	0	0

	4.) oben rechts	5.) unten links	6.) unten rechts.
0	0	0	0
1	+0,125	+0,125	+0,015
2	0	0	0,220
3	+0,338	+0,338	+0,009
4	0	0	+0,878

5	-,765	-0,765	+0,003
6	0	0	+0,659
7	-0,552	-0,552	-0,003
8	0	0	+ 0,439
9	-0,338	-0,338	-0,009
10	0	0	+0,220
11	-0,125	-0,125	-0,015
12	0	0	0

Einflusslinien (streng gerechnet) .

	1.) Obergurt	2.) Untergurt	3.) Diagonale ob.lks.
0	0	0	0
1	-0,706	+0,503	+0,116
2	-1,170	+1,245	-0,175
3	-1,882	+1,600	+0,186
4	-2,194	+1,780	+0,743
5	-1,670	+1,810	+0,285
6	-1,567	+1,416	+0,444
7	-1,226	+1,260	+0,252
8	-1,015	+0,973	+0,253
9	-0,734	+0,757	+0,149
10	-0,490	+0,504	+0,087
11	-0,232	+0,270	+0,027
12	0	0	0

	4.) oben rechts	5.) unten links	6.) unten rechts.
0	0	0	0
1	+0,204	+0,229	+0,098
2	+0,039	+0,050	-0,176
3	+0,460	+0,511	+0,147
4	-0,105	-0,116	+0,767
5	-0,544	-0,474	+0,134
6	-0,212	-0,199	+0,450
7	-0,312	-0,289	+0,241
8	-0,191	-0,180	+0,251
9	-0,189	-0,175	+0,142
10	-0,124	-0,115	+0,097
11	-0,091	-0,086	+0,019
12	0	0	0

Einflusslinie eines Vertikalstabes(Endriegel).

	1.) streng gerechnet.	2.) als Gelenkfachwerk gerech.
0	0	0
1	-0,092	-0,190
2	-0,143	0
3	-0,202	-0,514
4	-0,243	0
5	-0,319	-0,838
6	-0,329	0
7	-0,461	-1,162
8	-0,368	0
9	-0,689	-1,486
10	-0,252	0
11	-1,185	-1,810
12	0	0

Die graphische Darstellung zeigt, dass die Berechnung des Trägers als Gelenkfachwerk für die Diagonalstäbe und den Riegel Werte ergeben, die bei einem Fortschreiten der Last von Feld zu Feld zwischen Extremwerten und Werten ~ 0 abwechselnd schwanken. Diese dem Rautenträger bisher zugeschriebene Eigenschaft wird, wie die strenge Rechnung zeigt, ganz bedeutend gemildert. Es tritt ein Ausgleich zwischen den Extremwerten und Werten ~ 0 ein. Zu beachten ist aber, dass die Einflusslinien, wenn die Last in die Nähe der betrachteten Grössen zu stehen kommt, dem Charakter nach ebenfalls ein Wechseln von Maximal- und Minimalwerten ergeben, die jedoch beträchtlich gemildert erscheinen gegenüber der Berechnung als Gelenkfachwerk . Eine analoge Erscheinung, die auf einen Ausgleich hinweisende strenge Rechnung, können wir an den Gurtstäben feststellen. Wie lässt sich diese Erscheinung erklären ? Man beachte dabei die Gegenüberstellung der Berechnung des Rautenträgers als Gelenkfachwerk und als Rahmenwerk für eine Einzellast in der Mitte bezw. an der Stelle $m = 1$. Die Berechnung als einfach statisch unbestimmtes Gelenkfachwerk sagt aus, dass die Kraft teils fast vollständig, teils ganz in den <u>einen</u> Strebenzug geht, je nachdem ob die Riegel mit zur Übertragung der Auflagerkräfte herangezogen werden oder nicht. Demgegenüber sagt die strenge Durchrechnung, dass beide Strebenzüge mit zum Tragen herangezogen werden,

wenn auch nicht in gleichem Masse. Die Beobachtung, dass am Gelenkfachwerk ein Strebenzug nahezu entlastet wird, findet ihre Erklärung in der Wirkung, die 2 symmetrische Lasten auf das Gelenkfachwerk ausüben. Die Lasten wirken unvermindert durch den ganzen Träger hindurch, die Stabkräfte der beiden Riegel bestimmen die Grössen in den beiden Gebieten rechts und links von der Last . Diese Erscheinung ist recht unwahrscheinlich, es zeigt sich auch bei der strengen Rechnung, dass die Wirkung der beiden Lasten sich vom 4.Felde ab ganz erheblich vermindert hat, so stark, dass die folgenden Felder kaum noch mitmachen. (Wie weit sich diese Wirkung bei anderen Querschnittsverhältnissen, also sehr schwachen Diagonalen, auswirkt,wäre noch zu untersuchen ; es handelt sich dabei lediglich um die Durchrechnung eines anderen Zahlenbeispiels). Diese Erscheinungen führen aber gerade zu einer Heranziehung beider Strebenzüge, zu einem Ausgleich der Spitzen in den Einflusslinien. Ebenso lässt sich der Ausgleich der Biegungslinien eines Gurts erklären. Auch hier haben wir eine Erscheinung , die deutlich zeigt, dass die starren Knotenpunkte einen beträchtlichen Ausgleich der sonst recht zickzackförmigen Biegungslinien bedingen. Auf ähnliche Ergebnisse ist Herr Dr.-Ing. Christiani in seinen beiden Arbeiten über den Rautenträger gestossen.

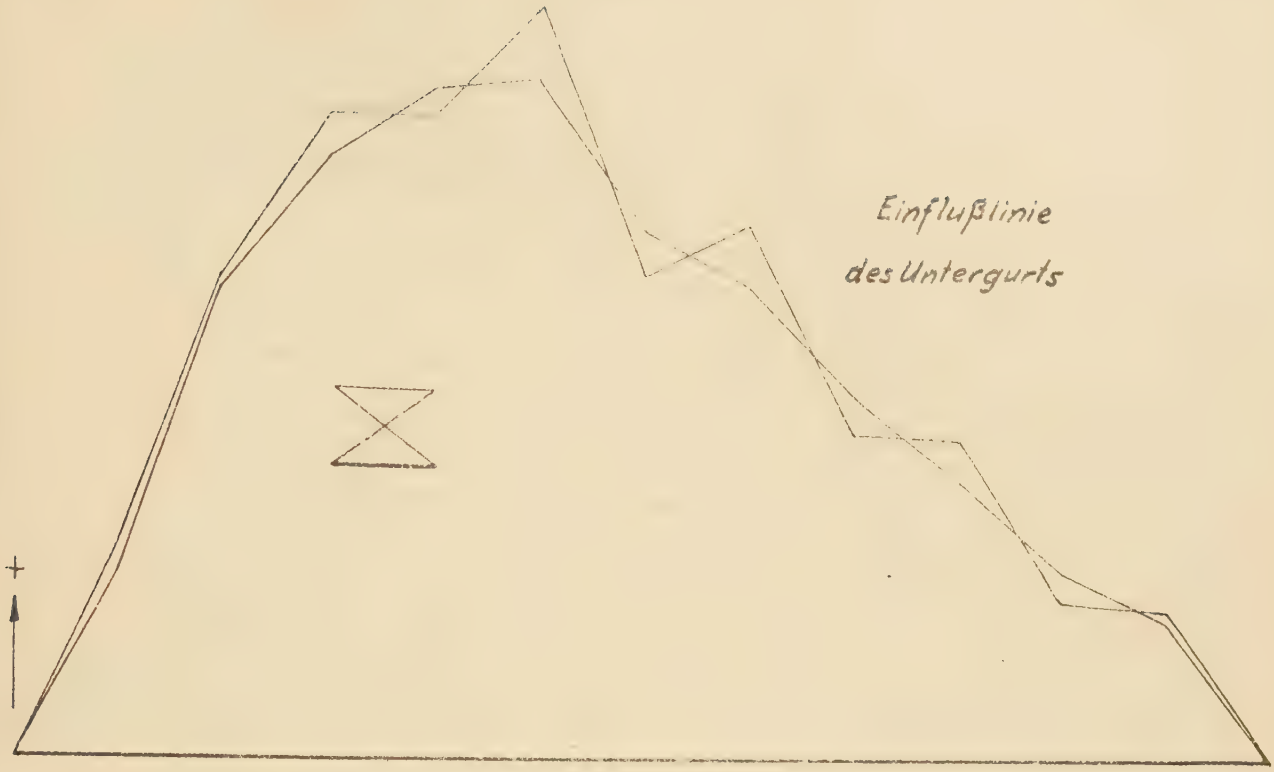
Eine Frage wäre noch zu erörtern : Nehmen die Nebenspannungen tatsächlich die grossen Werte an, die auf Grund des Mohr'schen Verfahrens bisher für den Rauten-

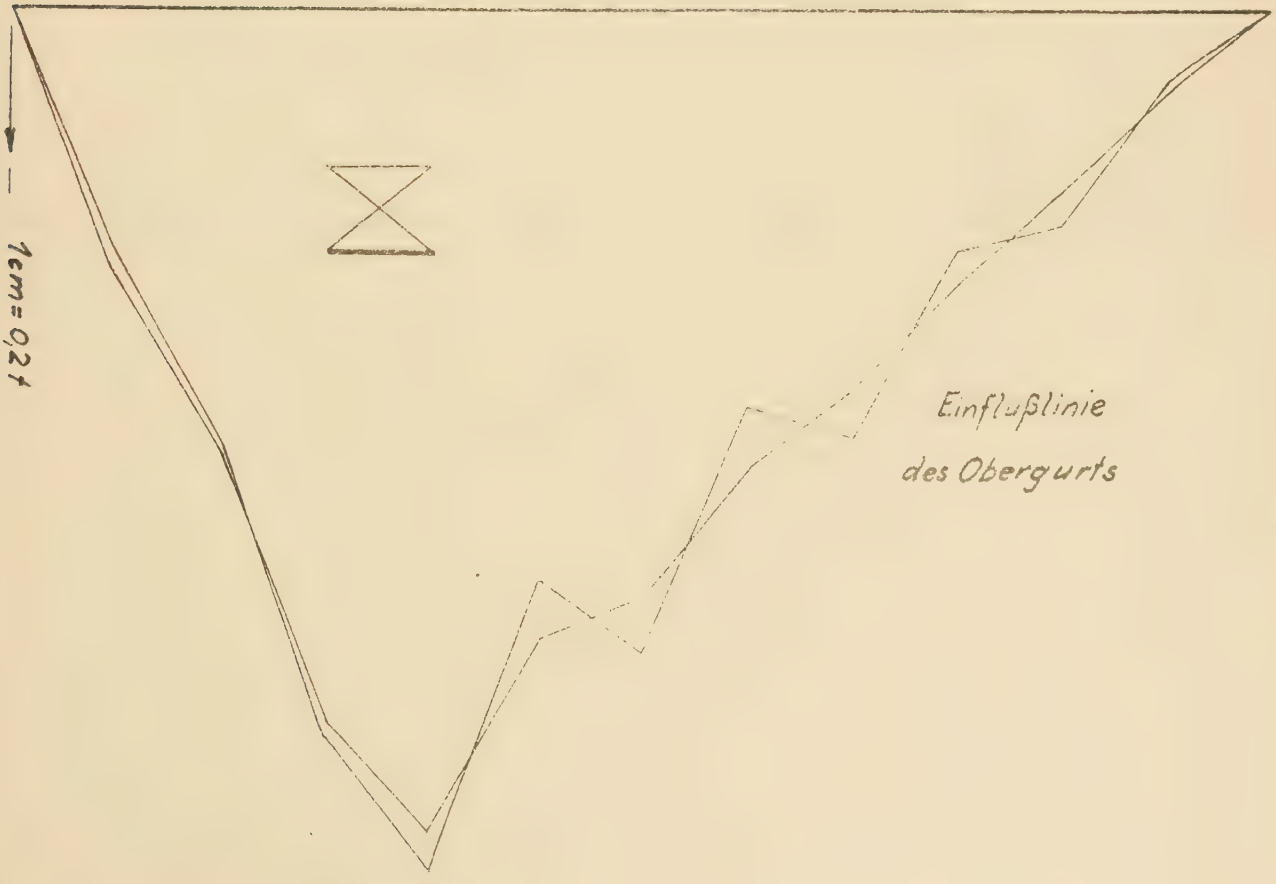
träger angegeben wurden ? Die bisher erkannten wirk - lichen Eigenschaften des Trägers weisen auf wesentlich kleinere Nebenspannungen hin . Immerhin sind die der strengen Berechnung entnommenen Werte noch beträchtlich hoch. Es mag noch angängig sein, die Nebenspannungen in den Gurtstäben Nebenspannungen zu nennen, wenn ihre Werte auch maximal 40 % der Hauptspannungen ausmachen . Betrachtet man dagegen die Diagonalstäbe, so muss man erkennen, dass hier die Nebenspannungen in der Regel nahezu ebenso gross sind wie die Hauptspannungen, vereinzelt sogar grösser, in der Nähe der Last sogar ein vielfaches der Grundspannungen ausmachen . (Man beachte die beiden Figuren, die für Last in der Mitte Haupt- und Neben - spannungen angeben.) Schreibt man die in jedem Stabe auftretende grösste Spannung an die einzelnen Stäbe, so muss auffallen, dass eigentlich beide Strebenzüge sehr stark zum Tragen herangezogen werden, der eine allerdings etwas weniger wie der andere .

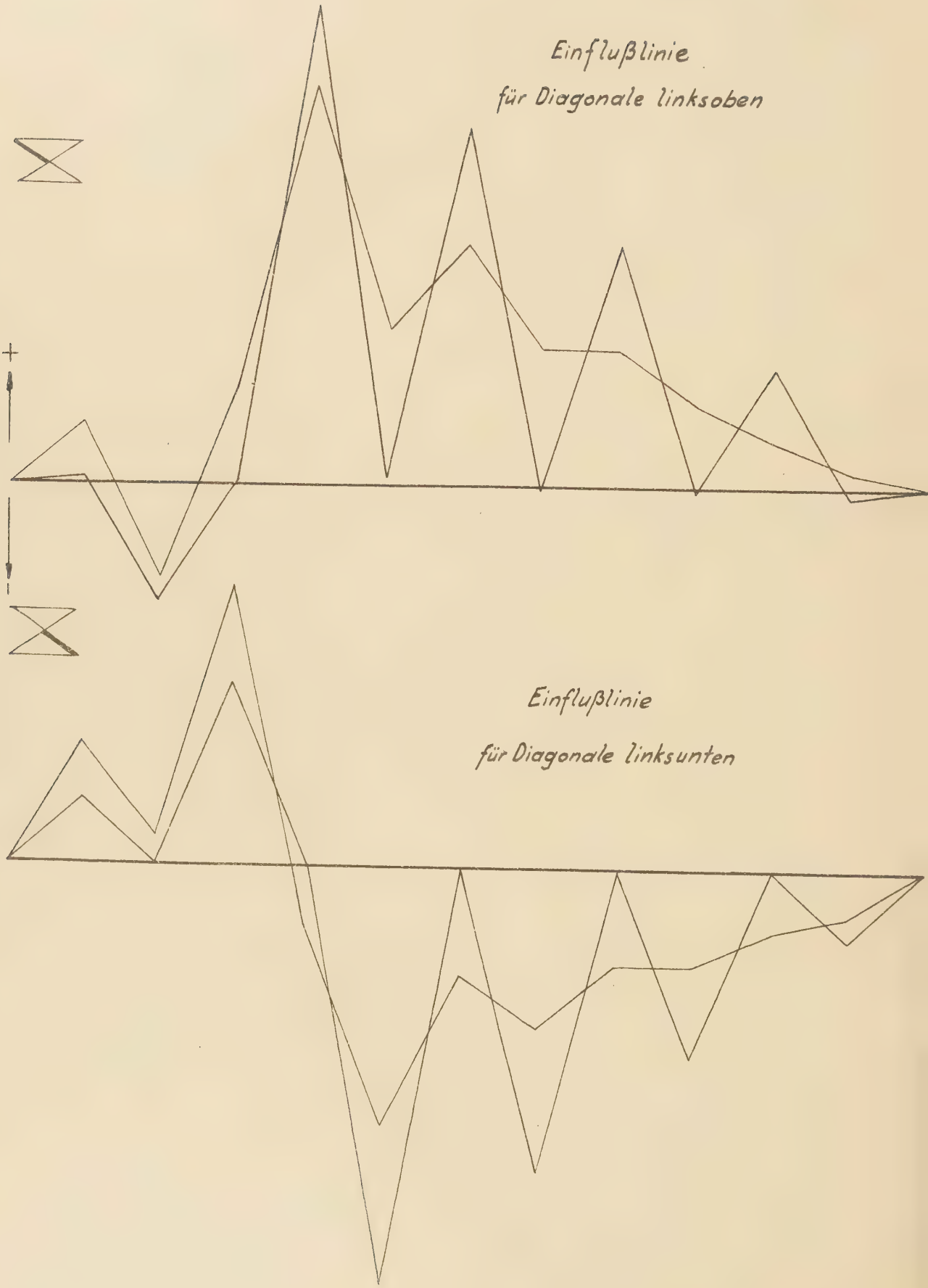
Eine strenge Berechnung des Trägers wird immer eine umfangreiche Arbeit bedeuten, eine genaue Berechnung der Nebenspannungen erscheint jedoch notwendig. Inwieweit die Nebenspannungen richtig erfasst werden, wenn man die Biegungslinie im „wesentlichen" ausgleicht, mag noch dahingestellt sein, immerhin dürfte dieser Weg das bisher schnellste Annäherungsverfahren darstellen. Wenn sich auch der Träger beträchtlich günstiger verhält,

als man bisher annehmen dürfte, so bedeutet diese Tat - sache noch keineswegs eine Überlegenheit dieser Trägerart über andere, bisher bewährte, einer schnelle - ren Berechnung zugänglichere Systeme .

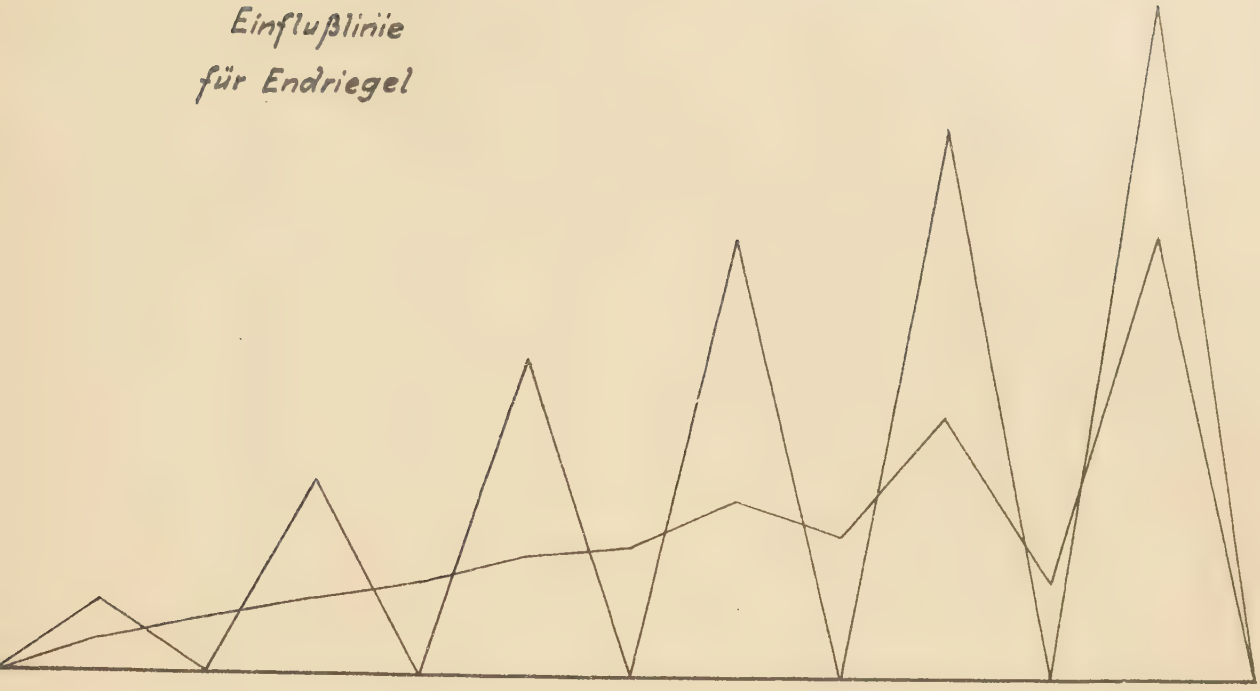
Biegungslinie des Untergurts
im gleichen Verhältnis gezeichnet

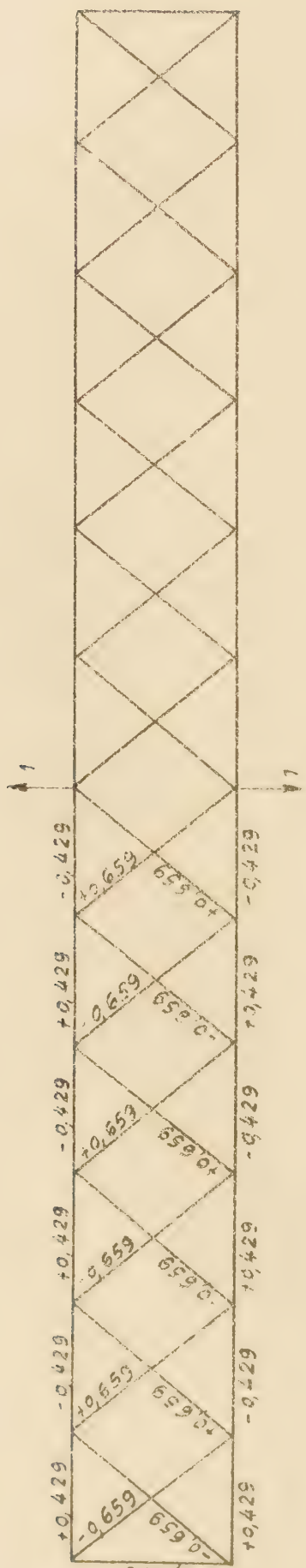

Einflußlinie
des Untergurts
+

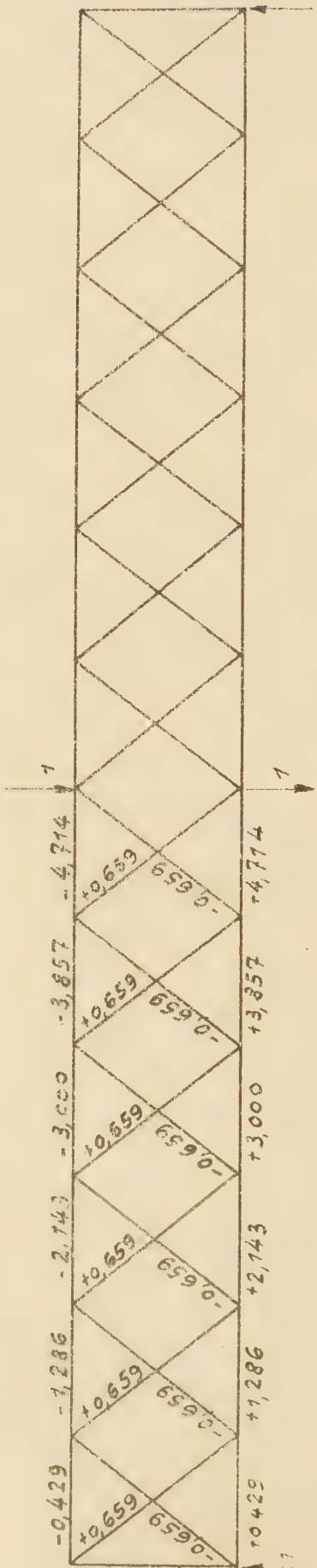

−
1cm=0,2t
Einflußlinie
des Obergurts


Einflußlinie
für Diagonale linksoben
+
Einflußlinie
für Diagonale linksunten

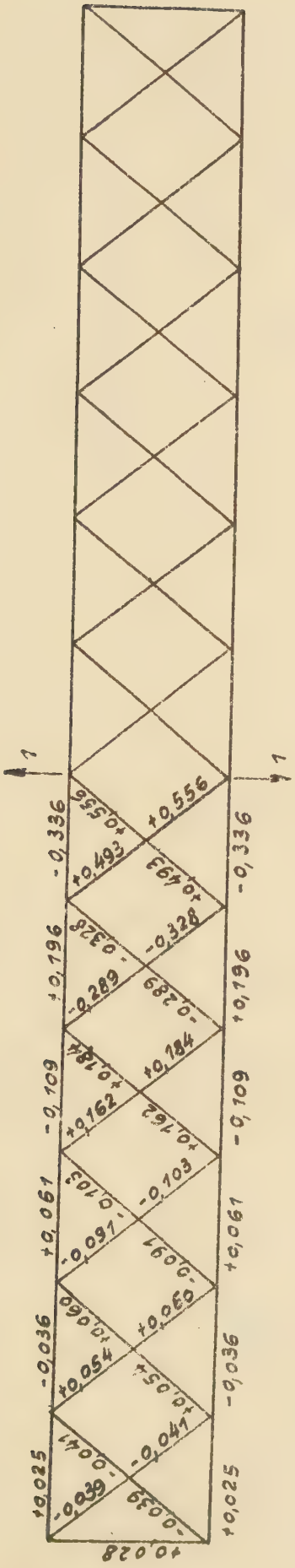
Einflußlinie
für Endriegel

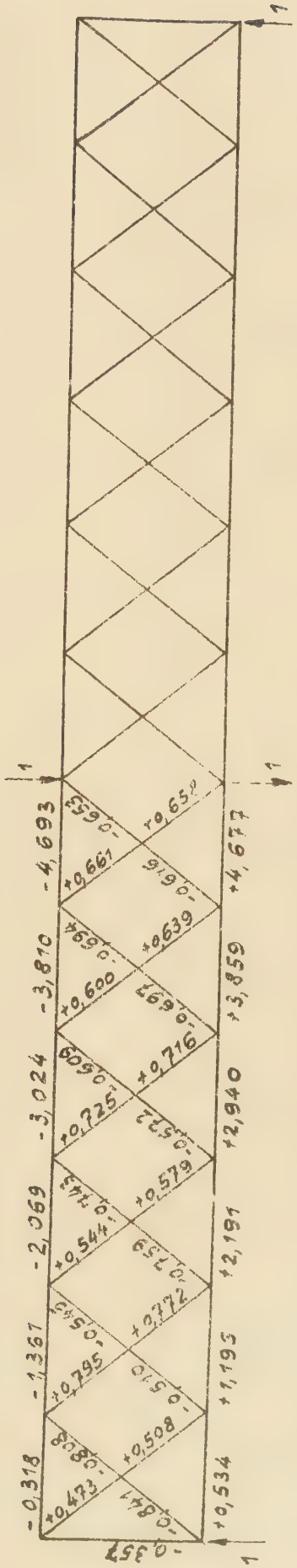




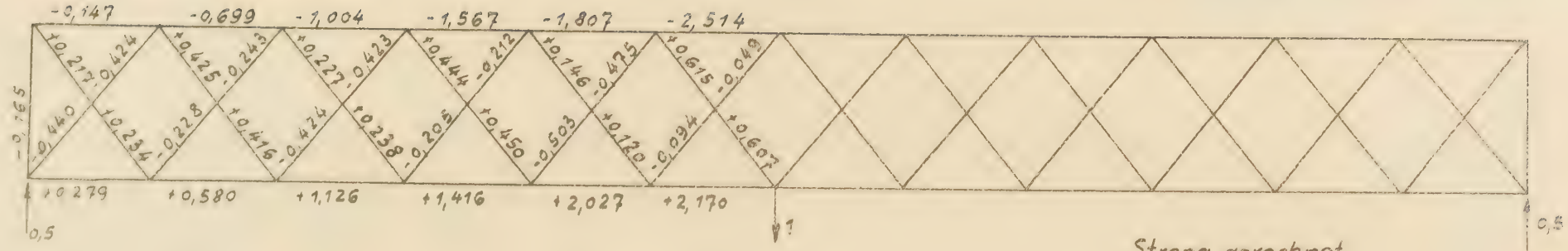


Als Gelenkfachwerk gerechnet

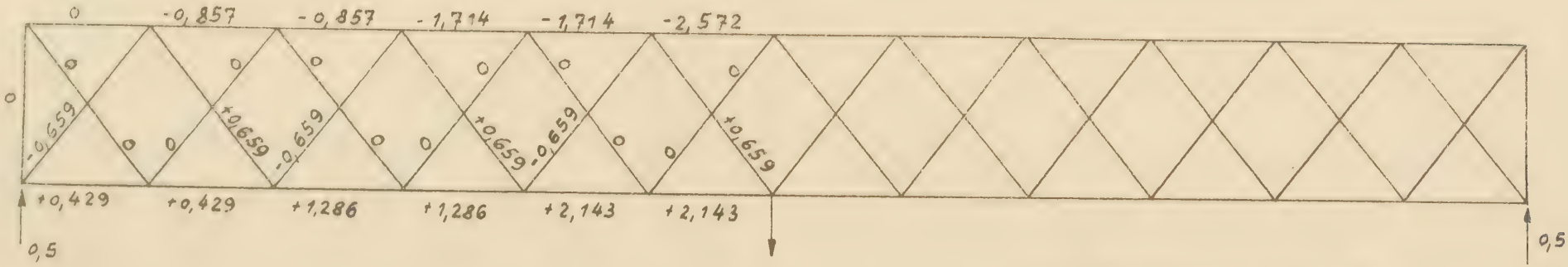




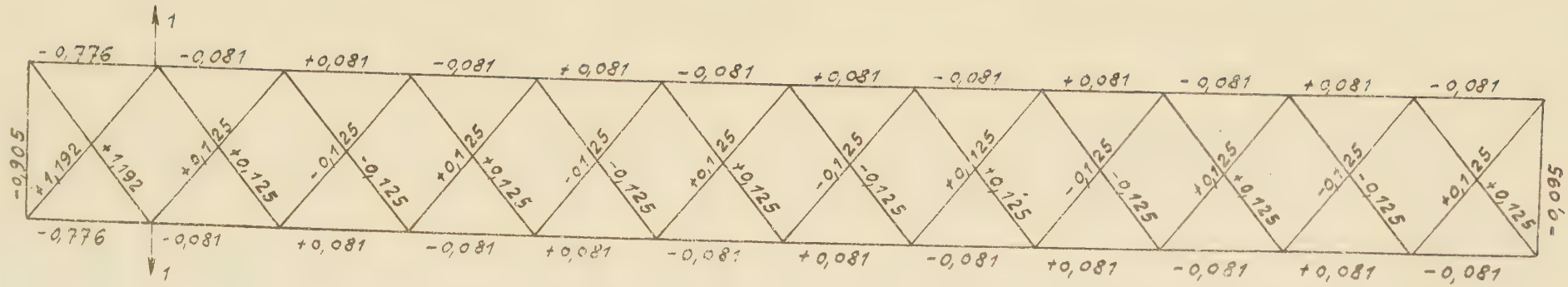
Streng gerechnet

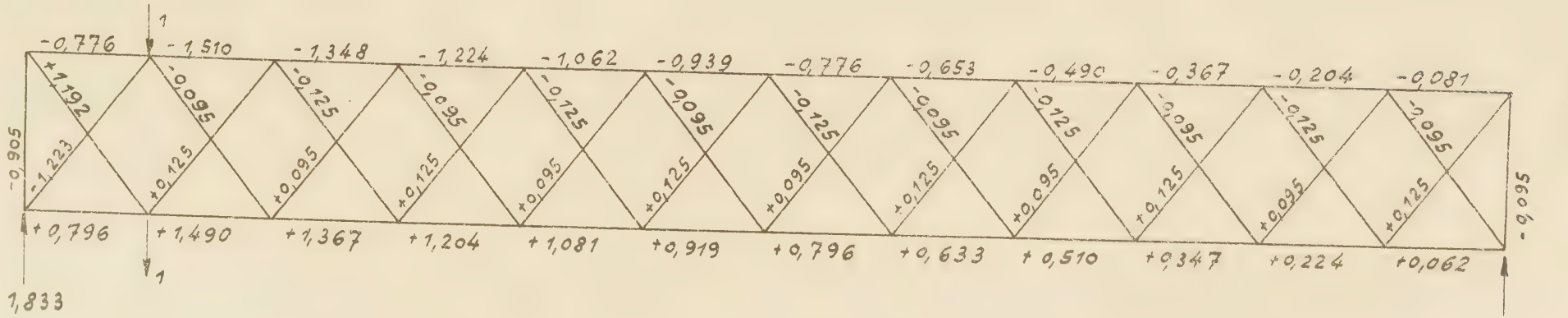


Streng gerechnet

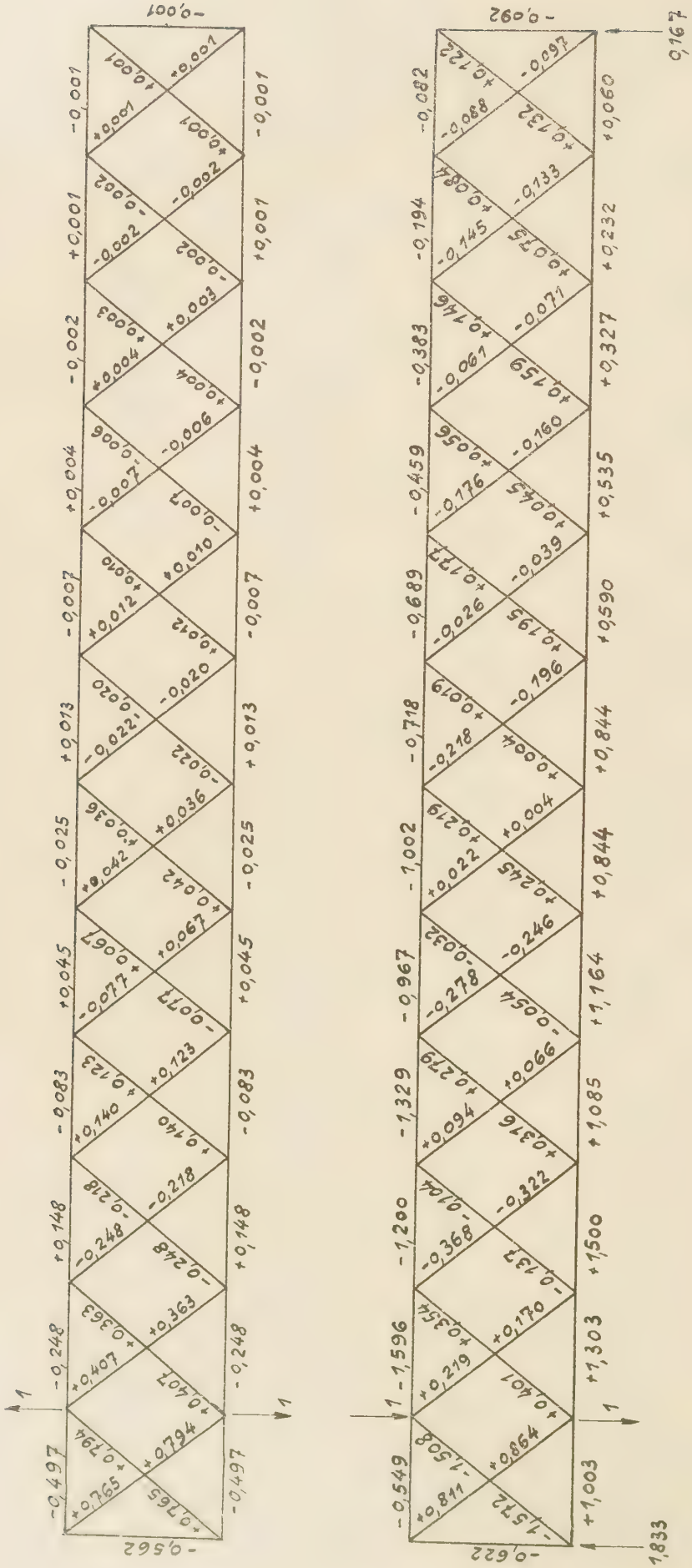


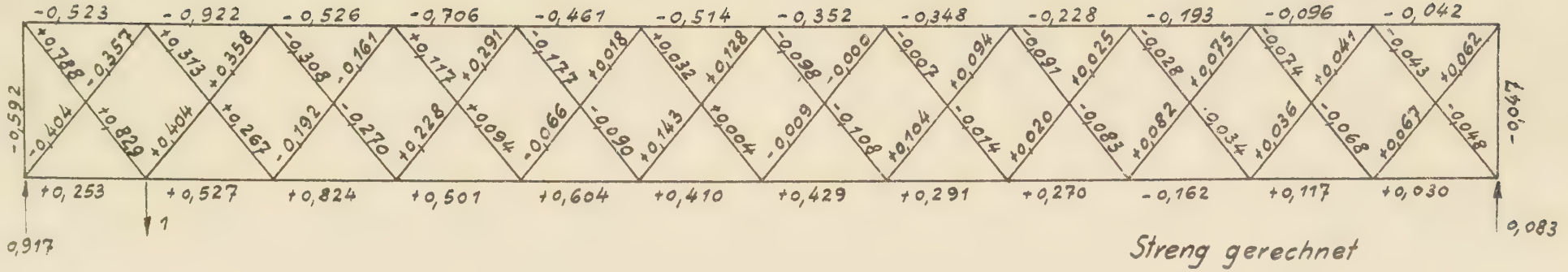
Als Gelenkfachwerk gerechnet



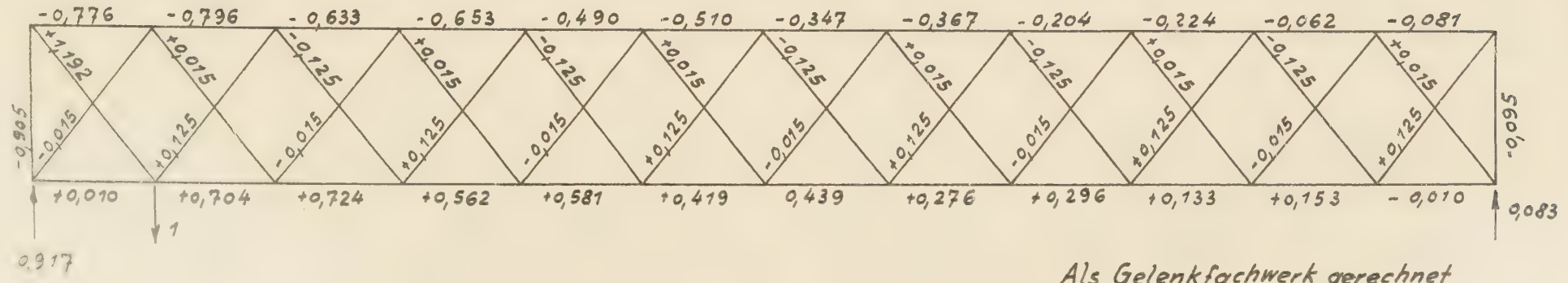


Als Gelenkfachwerk gerechnet


-0,001
-0,001
-0,001

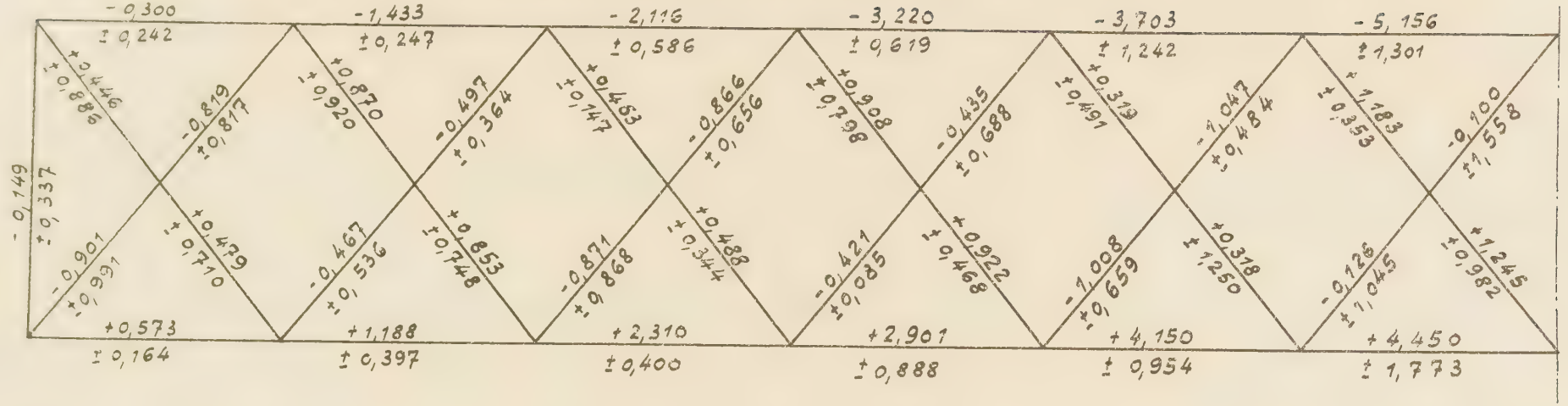


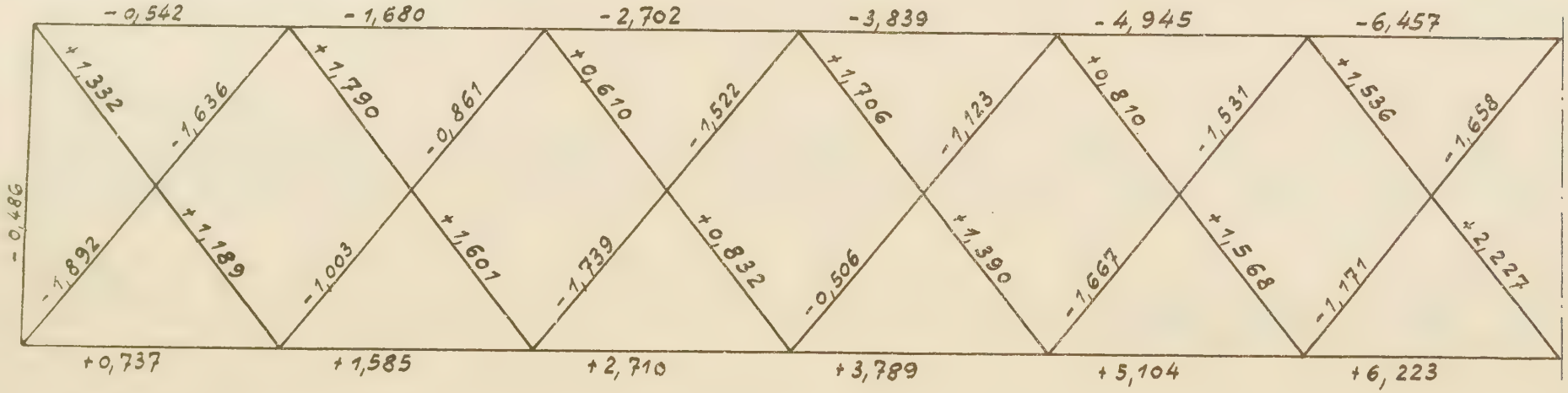
Streng gerechnet



Als Gelenkfachwerk gerechnet

Hauptspannungen und Nebenspannungen bei Last in der Mitte





Werte der maximalen Spannungen in den einzelnen Stäben

Lebenslauf.

Geboren wurde ich Friedrich Rollfinke zu Nieder - Salzbrunn Kreis Waldenburg am 12. September 1901, protestantischer Konfession als Sohn des Pastors Hugo Rollfinke. Im Juni 1920 legte ich am Realgymnasium zu Augsburg meine Reifeprüfung ab. Oktober 1921 wurde ich an der Technischen Hochschule zu Breslau in der Fachrichtung Maschinenwirtschaft immatrikuliert. Die Diplom-Hauptprüfung legte ich hierselbst im Oktober 1927 ab. Seit meiner Vorprüfung bin ich als Assistent am Lehr - stuhl für Mechanik tätig. Dabei wurde mir die Möglich - keit zur Anfertigung vorliegender Doktorarbeit gegeben.

Die vorliegende Arbeit wurde an der Techni - schen Hochschule zu Breslau auf Anregung von Herrn Prof. Dr.-Ing. Mann ausgeführt, dem ich auch an dieser Stelle für das grosse Wohlwollen und Interesse, das er mir stets entgegengebracht hat, sowie für seine Unterstützung mit Rat und Tat meinen ergebensten Dank ausspreche.

Druckfehlerverzeichnis.

Seite 2: fehlt auf Zeile 6: und Z_r

Seite 11: Zeile 8 1 statt 1.

" 10 1 " 1.

Seite 13: " 10 1 " 1.

" 13 $\frac{1}{s_2}$ statt $\frac{1}{s_2}$

$\frac{1}{s_1}$ statt $\frac{1}{s_1}$

Seite 14 Zeile 12) " 14) $(1 + \frac{1}{2}\nu_2)$ statt $(1 + \frac{1}{2}\nu_2)$.

Auf Seite 15 muss es stets heissen:

$(1 + \frac{1}{2}\nu_1)$ statt $(1 + \frac{1}{2}\nu_1)$

$(1 + \frac{1}{2}\nu_2)$ " $(1 + \frac{1}{2}\nu_2)$

$(1 + \frac{1}{2}\nu_3)$ " $(1 + \frac{1}{2}\nu_3)$

$(1 - \nu_3)$ statt $(1 - \nu_3)$

$(1 - \nu_2)$ " $(1 - \nu_2)$

Seite 18: Zeile 10,11,12: 1 statt 1.

Seite 27: Zeile 15 : $\frac{1}{b}$ statt $\frac{1}{b}$

Seite 33: Zeile 9 : 1 statt 1.

Seite 34: Zeile 10 : Z_{-m} statt Z_m.

Seite 48: Zeile 7 : $X_r = -1$ ist Index.

Seite 56: Zeile 8 : f statt F.

Zeile 10: f statt F (in der Klammer).

Seite 57: Zeile 4 : f statt F^+

Seite 58: $(1 + \frac{1}{2}\nu_2)$ statt $(1 + \frac{1}{2}\nu_2)$

$(1 + \frac{1}{2}\nu_1)$ " $(1 + \frac{1}{2}\nu_1)$.

Séite 59:	Zeile 2 :	1 statt l .
	Zeile 13:	0,558 statt 558.
Seite 76:	Zeile 8 :	14310 statt 1431.
Seite 80:	Zeile 6 :	$\bar{C}_1$ statt C_1
	Zeile 7 :	$\bar{C}_2$ statt C_2
	Zeile 8 :	$\bar{C}_3$ statt C_3
	Zeile 9 :	$\bar{C}_4$ statt C_4 .
Seite 83:		$Y_{\bar{0}} - Y_{\bar{9}}$ statt $Y_0 - Y_9$.
	Zeile 15:	- 1,0 statt 1,0 .
Seite 87:	Zeile 18:	b fällt weg.
Seite 92:	Zeile 16:	$\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ statt $\frac{\alpha^2}{\alpha_1}$
Seite 112:	Zeile 24:	- 0,220 statt 0,220 .